Hamilton-Jacobi Method and Effective Actions of D-brane and M-brane in Supergravity

hep-th 0211074 (PTP109(2003)687)

hep-th 0305090

佐藤松夫

阪大 素粒子論研究室

土屋麻人氏との共同研究

Introduction

結論

D-brane 有効作用 (DBI + WZ 作用) は supergravity の Hamilton-Jacobi 方程式の解、つまり On-shell action であることがわかった

(解は open string の α' 展開の補正を all order 含む)

$$S_0 = S_c + S_{BI} + S_{WZ}$$

$$S_c = 10\int d^9x \sqrt{-g}\, e^{-2\phi + c}$$

$$S_{BI} = \beta \int d^9x\, e^{-\phi}\sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu})} \qquad (\mathcal{F}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})$$

$$S_{WZ} = -\beta \sum_n \int C^{(n)} \wedge e^{\mathcal{F}}$$

(β, $F_{\mu\nu}$: 任意定数)

Hamilton-Jacobi 形式

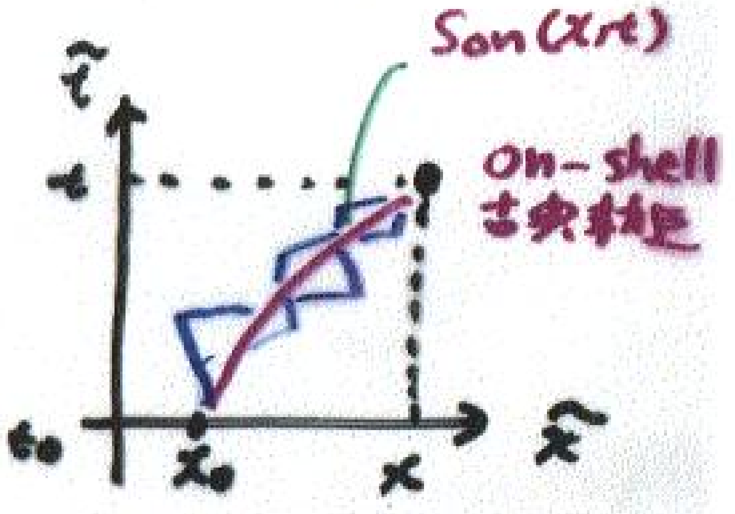
1次元シュレーディンガー方程式

$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = \mathcal{H}\psi(x,t)$ $\quad \left(\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right)$

$\psi(x) = \langle x,t|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\,|x_0,t_0\rangle$

$\quad = \int^x D\tilde{x}\, e^{\frac{i}{\hbar}S(\tilde{x},t)}$

$\quad \longrightarrow e^{\frac{i}{\hbar}S_{on}(x,t)} \quad (\hbar\to 0)$



$-\partial_t S_{on} = -i\frac{\hbar}{2m}\partial_x^2 S_{on} + \frac{1}{2m}(\partial_x S_{on})^2 + V$

$\hbar\to 0$より、

$\partial_t S_{on} + \left(\frac{1}{2m}(\partial_x S_{on})^2 + V\right) = 0$: Hamilton-Jacobi方程式

・古典Hamilton形式からHamilton-Jacobi方程式を得るには

$\partial_t S_{on} + H = 0$ で、

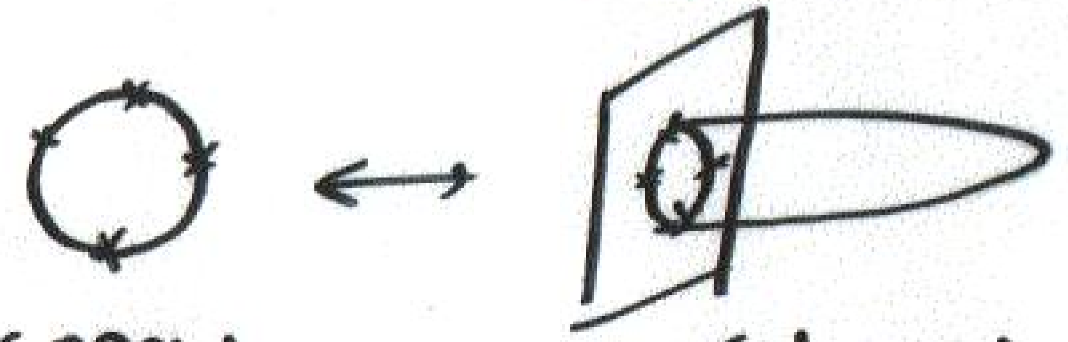
$P = \partial_x S_{on}$ とおけばよい。

・この導出の流れより、S_{on}はon-shell actionであることがわかる。

Point

• D-brane有効作用: superstringでdisk amplitudeの計算で導出
(α'展開のall-orderを含む)

↓

• 

$= \langle B|0 \rangle$

↓

• D-brane有効作用の古典極限 ($\alpha' \to 0$) は
Hamilton-Jacobi方程式の解 (On-shell 作用)

↓

• それにもかかわらず、α'展開 full の有効作用そのものが解であった
(Super symmetry ?)

この発見により

• Supergravityの枠組みの中だけで計算可能なので、
曲がった空間を背景にとれる

• Super symmetryをexplicitに使わないのでnon-SUSY背景
に使える可能性がある

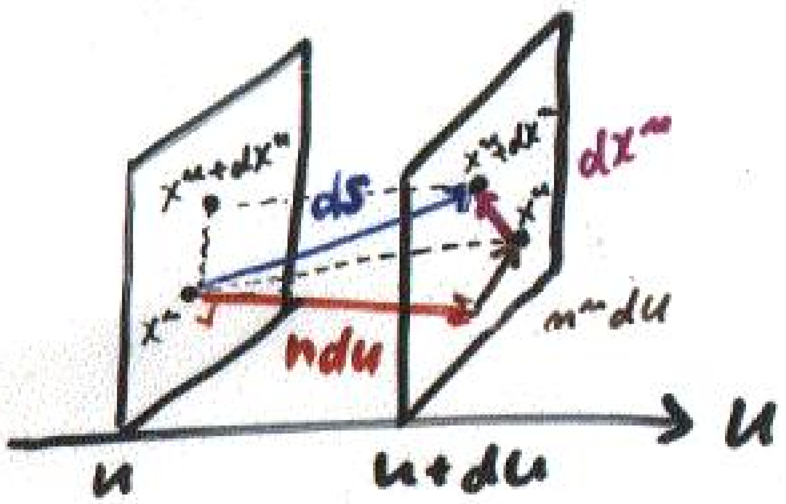
ADM形式とHamilton-Jacobi方程式の関係

説明の簡単化のため、5次元, $h_{\alpha\beta}(\xi)$, $\phi(\xi)$ のみの系を考える.
$(\alpha, \beta = 0, 1, \cdots 4)$

ADM分解 ：metricの変数変換

$$\xi^\mu = x^\mu \ (\mu = 0,1,2,3) \quad \xi^4 = u$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= h_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \\ &= (n^2 + g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu) du^2 + 2 n_\mu du\, dx^\mu + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$



n : lapse
n^μ : shift

$$\begin{aligned} I_5 &= \int d^5\xi \sqrt{-h} \left(R - \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \Lambda \right) \\ &= \int du\, d^4x \sqrt{-g}\, n \left\{ -(K_{\mu\nu})^2 + K^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} (\partial_u \phi - n^\mu \partial_\mu \phi)^2 + \mathcal{L} \right\} \end{aligned}$$

$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2n} (\partial_u g_{\mu\nu} - \nabla_\mu n_\nu - \nabla_\nu n_\mu)$ $\quad K = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ (extrinsic curvature

$$\mathcal{L} = R^{(4)} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \Lambda$$

$$\pi^{I_5}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I_5}{\delta (\partial_u g_{\mu\nu})} = -K_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} K$$

$$\pi^{I_5}_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I_5}{\delta (\partial_u \phi)} = -\frac{1}{n} (\partial_u \phi - n^\mu \partial_\mu \phi)$$

で書き換えると.

$$I_5 = \int dr d^4x \sqrt{-g}\left(\pi^{\mu\nu}\partial_u g_{\mu\nu} + \pi_\phi \partial_u \phi - nH - n_\mu H^\mu\right)$$

H : Hamiltonian constraint　H^μ : momentum constraint

$$H = -(\pi^{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2}\pi_\phi^2 - \mathcal{L}$$

$\pi^{S_0\,\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)}$,　$\pi_\phi^{S_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta S}{\delta \phi(x)}$ でおきかえると

(S : on-shell action)

Hamilton-Jacobi方程式

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta \phi(x)}\right)^2 - \mathcal{L} = 0$$　を得る.

これと同様の手続きをIIB Supergravityを S^5 reductionした5次元作用に行うと. IIBのHamilton-Jacobi方程式を得る.

<u>u一定面で場が定数</u>という条件の下で. $S_0 = S_c + S_{BI} + S_{WZ}$ はこのIIB SupergravityのHamilton-Jacobi方程式の解.

・ $S = S_0 + S_2 + S_4 +$ (higher derivative term) としたlowest S_0

・上の例では $\mathcal{L} = \underbrace{R^{(4)} - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}_{\to 0} - \Lambda$ として.

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta \phi(x)}\right)^2 + \Lambda = 0$$

: S_0のみたすHamilton-Jacobi方程式

explicitly,

10D IIB supergravity

$$I_{10D}^{IIB} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-G}\Big[e^{-2\phi}\Big(R + 4\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}|H_3|^2\Big)$$
$$-\frac{1}{2}|F_1|^2 - \frac{1}{2}|\bar{F}_3|^2 - \frac{1}{4}|\tilde{F}_5|^2\Big]$$
$$+\frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int C_4\wedge H_3\wedge F_3$$

with

$*\tilde{F}_5 = \tilde{F}_5$ (Self-dual condition)

- $H_3 = dB_2$
- $F_1 = dC_0$
- $\bar{F}_3 = dC_2 + C_0\wedge H_3$
- $\tilde{F}_5 = dC_4 + C_2\wedge H_3$

Hamilton-Jacobi equation for S_0

$$-e^{2\phi-\frac{5}{4}\rho}\Big\{\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta g_{\mu\nu}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta g_{\mu\nu}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta\phi}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta\phi}\right)^2$$

$$+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta\phi}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta\rho}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta B_{\mu\nu}}-C^{(0)}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta C^{(2)}_{\mu\nu}}-6\,C^{(2)}_{\lambda\rho}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta C^{(4)}_{\mu\nu\lambda\rho}}\right)^2\Big\}$$

$$-e^{-\frac{5}{4}\rho}\Big\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta C^{(0)}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta C^{(2)}_{\mu\nu}}\right)^2+12\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta C^{(4)}_{\mu\nu\lambda\rho}}\right)^2\Big\}$$

$$-e^{-2\phi+\frac{3}{4}\rho}\,\bar{R}^{S^5}$$

$$=0$$

Solution S_0

$$S_0=S_C+S_{BI}+S_{WZ}$$

$$S_C=10\int d^4x\sqrt{-g}\,e^{-2\phi+\rho}$$

$$S_{BI}=\rho\int d^4x\,e^{-\phi}\sqrt{-\det\left(g_{\mu\nu}+\mathcal{F}_{\mu\nu}\right)}\qquad\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}\right)$$

$$S_{WZ}=-\rho\sum_n\int C^{(n)}\wedge e^{\mathcal{F}}$$

11D supergravity

$$I_{11} = \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\int d^{11}x\sqrt{-G}\left(R - \frac{1}{2}|F_4|^2\right) - \frac{1}{12\kappa_{11}^2}\int A_3\wedge F_4\wedge F_4$$

$\cdot\ F_4 = dA_3$

Ⓗ Hamilton - Jacobi equation for S_0^{M5}

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0^{M5}}{\delta g_{\mu\nu}}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(g_{\mu\nu}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0^{M5}}{\delta g_{\mu\nu}}\right)^2 + \frac{5}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0^{M5}}{\delta\varphi}\right)^2 - \frac{4}{9}\left(g_{\mu\nu}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0^{M5}}{\delta g_{\mu\nu}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0^{M5}}{\delta\varphi}\right)$$

$$+3\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0^{M5}}{\delta A_{\mu\nu\lambda}} + 10A_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0^{M5}}{\delta A_{\mu\nu\lambda\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}}\right)^2 + \frac{6!}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0^{M5}}{\delta A_{\mu_1\cdots\mu_6}}\right)^2 + e^{\frac{3}{2}\varphi}\bar{R}^{(S^4)} = 0$$

Ⓢ non-linear self-duality for $\mathcal{F}_3 (= A_3 + F_3)$

$$-\frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_6}\mathcal{F}_{\mu_4\mu_5\mu_6}$$

$$= 12\frac{\delta}{\delta A_{\mu_1\mu_2\mu_3}}\sqrt{1+\frac{1}{12}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}+\frac{1}{288}(\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho})^2-\frac{1}{96}\mathcal{F}_{\mu\nu\lambda}\mathcal{F}^{\nu\lambda\rho}\mathcal{F}_{\rho\sigma\tau}\mathcal{F}^{\sigma\tau\mu}}$$

$$S_0^{M5} = S_{M5}^{C} + S_{M5}^{BI} + S_{M5}^{WZ}$$

$$S_{M5}^{C} = 8\int d^6x\sqrt{-g}\,e^{\frac{3}{4}\varphi}$$

$$S_{M5}^{BI} = \rho_{M5}\int d^6x\sqrt{-g}\sqrt{1+\frac{1}{12}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}+\frac{1}{288}(\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho})^2-\frac{1}{96}\mathcal{F}_{\mu\nu\lambda}\mathcal{F}^{\nu\lambda\rho}\mathcal{F}_{\rho\sigma\tau}\mathcal{F}^{\sigma\tau\mu}}$$

$$S_{M5}^{WZ} = -\rho_{M5}\int\left(A_6 + \frac{1}{2}A_3\wedge F_3\right)$$

- S_0 は 拘束条件Ⓢのもとで Ⓗ の解。

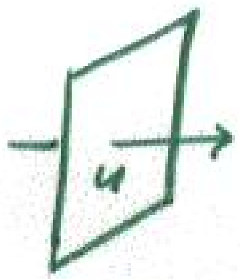
- M5 の world volume 理論 では、(集団座標 X を入れた) S_0 を 変分して得られる式 と non-linear self-duality 拘束条件 をあわせて eqs. of motion

cf. hep-th/9902171 Sezgin, Sundell

ADM分解のstring理論による解釈

ADM分解：u一定面でdiffeoを課す（supergravity）

$\approx$ u一定面でphysical state conditionを課す（string）



（D-braneのboundary state $\langle B|$ を u におく．）

$\rightarrow$ $S_0 = \langle B|0\rangle$ ： u にあるD-braneの有効作用

※ S_0 は u一定面の"flat" D-braneの有効作用

背景はまがっているが、D-braneはflat

induced metric

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} h_{\alpha\beta}(\xi)$$

$$= h_{\mu\nu}(\xi) \qquad \begin{pmatrix} \mu,\nu = 0,1,2,3 \\ \alpha,\beta = 0,1,2,3,4 \end{pmatrix}$$

(static gaugeをとった.)

同様に．

$\bar{B}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}$, $\bar{C}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}$ $\quad \bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma}$

$F_{\mu\nu}$の意味

bulk ゲージ変換 $\delta B_2 = d\Lambda_1 = \bar{F}_2$ $\quad (\bar{F}_2 = \text{const.})$

($\Lambda_\mu = \bar{F}_{\mu\nu} x^\nu$ とおいた.)

とくても 解 → 解

boundary があると.

stringの B_2 や A_1 とのcoupling : $I = \int_M B_2 + \int_{\partial M} A_1$

B_2 のゲージ変換で

$\delta I = \int_M d\Lambda_1 + \int_{\partial M} \delta A_1 = \int_{\partial M} (\Lambda_1 + \delta A_1)$ より.

$\delta A_1 = -\Lambda_1$, $\delta F_2 = -\bar{F}_2$ で invariant.

→ 有効作用 は $B_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}$ という組み合わせ

Hamilton-Jacobi 形式

(Supergravity に u 一定面 という boundary を導入)

"world volume

Hamilton-Jacobi 方程式の解 S_0 は

$\mathcal{F}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \bar{F}_{\mu\nu}$ の組み合わせの汎関数

└ 任意定数

→ $F_{\mu\nu}$: ゲージ場の field strength

D-brane有効作用は dual SYM や dual NCSYM からのゆらぎの on-shell 作用

dual NCSYM解

$$ds_5^2 = \alpha' R^2 \left[u^2 \left(-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 \right) + \frac{u^2}{1+\tilde{b}^2 R^4 u^4} \left((dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right) + \frac{du^2}{u^2} \right]$$

$$e^{2\phi} = \hat{g}^2 \frac{1}{1+\tilde{b}^2 R^4 u^4}$$

$$B_{23} = \frac{\alpha'}{\tilde{b}} \frac{\tilde{b}^2 R^4 u^4}{1+\tilde{b}^2 R^4 u^4}$$

$$C_{01} = \frac{\alpha'}{\hat{g}\tilde{b}} \tilde{b}^2 R^4 u^4$$

$$C_{0123} = \frac{\alpha'^2 R^4}{\hat{g}} \frac{u^4}{1+\tilde{b}^2 R^4 u^4} \qquad (R^4 = 4\pi \hat{g} N)$$

は、

- $\pi_\varphi^{I_5} = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \frac{\delta I_{5D}}{\delta(\partial_u \varphi(x))} = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} = \pi_\varphi^{S_0}$

  $(\varphi = g_{\mu\nu}, \phi, \ell, B_{\mu\nu}, C^{(0)}, C^{(2)}, C^{(4)})$

  ：S_0が定める解のflow方程式（1階微分方程式）

- $I_{5D} = S_0$

をみたす.

$\longrightarrow$ S_0は dual NCSYM からのゆらぎの on-shell 作用

※ $\tilde{b} \to 0$ ：dual YM

Conclusion

- D-brane有効作用（DBI + WZ作用）は Supergravityの Hamilton-Jacobi方程式の解、つまり On-shell作用
  （解は open string の α′展開の補正を all-order 含む）

- dual SYM, dual NCSYM, N枚のD3, N枚のD3 in B 背景は S_0が定める flow方程式をみたす.

  （S_0は ゲージ-重力対応において重力側の これらの背景からのゆらぎの flow を与える.）

  ※また、これは D-braneの有効作用が これらの背景中でも DBI + WZ 作用で記述されることを支持する.

- Dp ($0 \leq p \leq 7$), M2, M5, NS5, (p, q)-5 branes, (p, q)-string へも拡張した.

  hep-th/0305090 M.S., Asato Tsuchiya

  (M, IIA, IIB theory)

SL(2, R)

Discussion

新たな背景解

・Hamilton-Jacobi方程式の解S_0を求めたことはⅡB supergravityの運動方程式を一階積分したことに対応.

$$\pi_\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_0}{\delta \varphi} \quad (\varphi = g_{\mu\nu}, \phi, \rho, B_{\mu\nu}, C^{(0)}, C^{(2)}, C^{(4)}$$

・S_0は任意定数(β, $F_{\mu\nu}$)を含む.

この定数はHamilton-Jacobi方程式の一般解を正準変換の母関数としたときの新定数運動量.

その定数の共役座標も定数.

$$\rightarrow \quad \partial_u(\sqrt{-g}\,\pi_g^{u\nu}) = 0 \quad , \quad \partial_u(S_{BI} + S_{WZ}) = 0$$

・これらの方程式をあと一階積分すればⅡB supergravityの新たな背景解を得ることができる.

新たなS

・$S = S_0 + \underset{ex.}{\underline{S_2}} + $ (higher derivative term) の探究

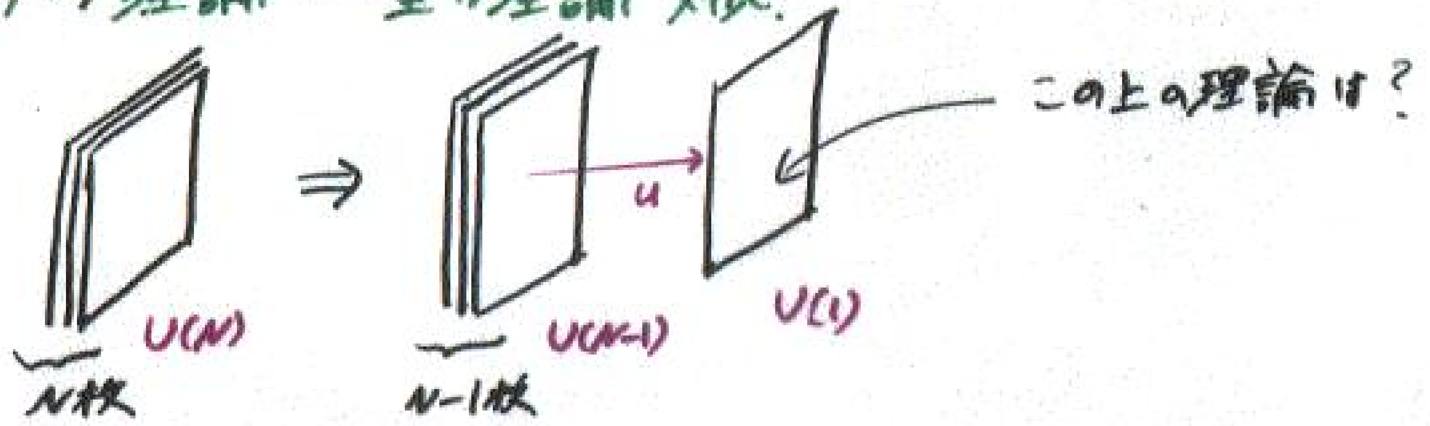
$\int d^4x\sqrt{-g}R$, DBIの微分補正, …

・完全解の探究

※今回求めたS_0は完全解ではない.

→わかればsupergravityの一般解を得ることができる.

ゲージ理論 — 重力理論 対応:



String 理論の立場 : DBI + WZ on $AdS_5 \times S^5$

U(N) ゲージ理論の立場 : coulomb phase

(background : Higgs $\Phi \neq 0$, $F_{\mu\nu}(U(1)) \neq 0$)

$N \to \infty$ で有効作用は. DBI + WZ on $AdS_5 \times S^5$

Buchbinder, Petrov, Tseytlin hep-th/0110173

重力理論の立場 : 今回の研究により. DBI + WZ on $AdS_5 \times S^5$

→ $\mathcal{N}=4$ SYM の coulomb phase の有効作用

= $AdS_5 \times S_5$ 上の supergravity の on-shell 作用

では. dual NC など他の背景ではどうか?

重力理論側はできた.

あとは. ゲージ理論側を計算すればよい.

Holographic RG

$S_0 = S_C + S_{BI} + S_{WZ}$ は. $g_{\mu\nu}, \phi$ だけでなく. $\overset{NS\text{-}NS}{B_{\mu\nu}}$, $\overset{R\text{-}R}{C^{(n)}}$ も含む

→ $B_{\mu\nu} \sim \theta_{\mu\nu}$, $C^{(n)}$ とcoupleする場のくりこみを議論可能

• $AdS_5 \times S_5$ からの $g_{\mu\nu}, \phi$ のみ のゆらぎでは.

@ de Boer, Verlinde, Verlinde hep-th/9912012

$S = S_0 + \Gamma$ とおいて Hamilton-Jacobi方程式に代入, coupling項で展開して

$$\left(a\frac{\partial}{\partial a} - \beta\frac{\partial}{\partial\phi} - \gamma\right)\langle O(x_1) \cdots O(x_n)\rangle = 0$$

: くりこみ群方程式 を得る.

$S_0 = \int d^4x\sqrt{-g}\, U(\phi)$ として. $\beta = \frac{6}{U}\frac{\partial}{\partial\phi}U$, $\gamma = \frac{\partial}{\partial\phi}\beta$

: S_0 から. β-関数, anomalous 次元 が求められる.

@ Martelli, Mueck hep-th/0205061

On-shell action $S(u) = S_0 + S_2 + S_4 + \Gamma$ 有限な有効作用

AdS 近傍で. $\underset{(u\to\infty)}{g_{\mu\nu} \sim u^2}$ volume $\sqrt{-g} \sim u^4$ 微分展開 $\partial^2 \sim g^{-1} \sim u$

発散するのは $S_0\ (\sim u^4)$, $S_2\ (\sim u^2)$, $S_4\ (\sim \ln u)$: 相殺項

しかし.

dual NCSYM では.

$\underset{(u\to\infty)}{g_{\mu\nu} \sim u^{-2}}$ $\sqrt{-g} \sim u^{-4}$ $\partial^2 \sim u^2$?

そもそも $u \to \infty$ で対応? cf. Dhar, Kitazawa hep-th/0010256