

# Phases of $\mathcal{N}=1$ Supersymmetric SO/Sp Gauge Theories

大河内 豊

(東工大)



Based on the work with

**Changhyun Ahn**

(韓国 キュンブーク国際大学)

**Bo Feng**

(USA プリンストン大学)

JHEP 03 (2003) 010

To appear

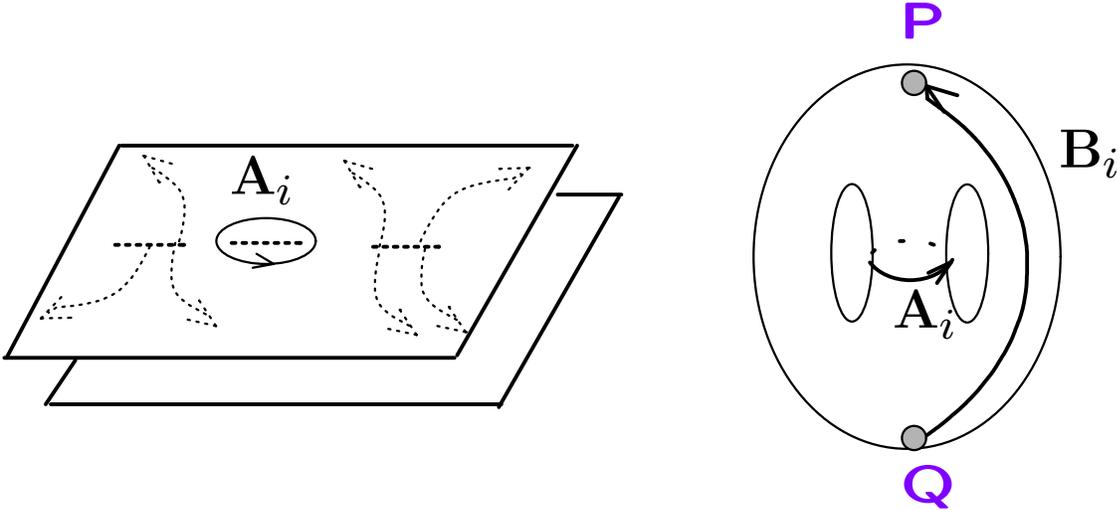
## トークの内容

1. Intro(Review CSW)
2.  $SO/Sp$ の特徴
3. 強結合からのアプローチ
4. 具体例  $SO(6), SO(7)$
5. 結論・これからの問題



## N=1 SuperYM の補助的システム

リーマン面  $y^2 = W'_{\text{tree}}(x)^2 + f_{n-1}(x)$   
with "Flux"



リーマン面の周期積分

$$S_i = \oint_{A_i} y(x) dx, \quad \Pi_i = \oint_{B_i} y(x) dx = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_i}$$

Fluxの分布

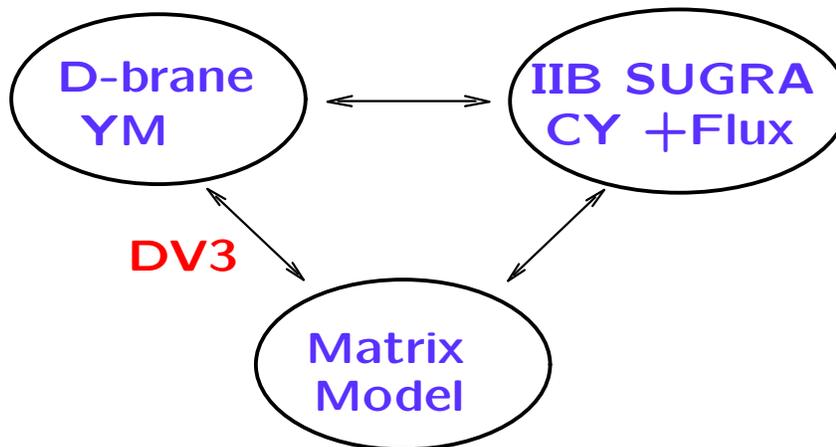
$$N_i = \oint_{A_i} T(x) dx, \quad \tau_i = \oint_{B_i} T(x) dx \equiv \tau_0 - i b_i$$

## YMの情報

$$\begin{aligned} S_i &\longmapsto -\frac{1}{32\pi^2} \text{Tr}_{\text{SU}(N_i)} W^\alpha W_\alpha \\ \tau_0 &\longmapsto -\frac{8\pi^2}{g_0^2} \\ b_i &\longmapsto \text{U}(N_i) \text{の} \theta \text{項} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial S_i \partial S_j} &\longmapsto \text{U}(1)^n \text{のカップリング定数} \end{aligned}$$

## Eff Sup Potential

$$W_{\text{eff}} = \sum_{i=1}^n \left( N_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_i} + \tau_i S_i \right)$$



# Chiral Ring

## Chiral Operator

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \text{ の lowest } \iff [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{O}] = 0$$

SUSY vacua  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}|0\rangle = 0$

$$\mathcal{O} \simeq \mathcal{O} + [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, A^{\dot{\alpha}}] \text{ ただし } [\bar{Q}_{\dot{\beta}}, [\mathcal{O}, A^{\dot{\alpha}}]] = 0$$

## クラスター性

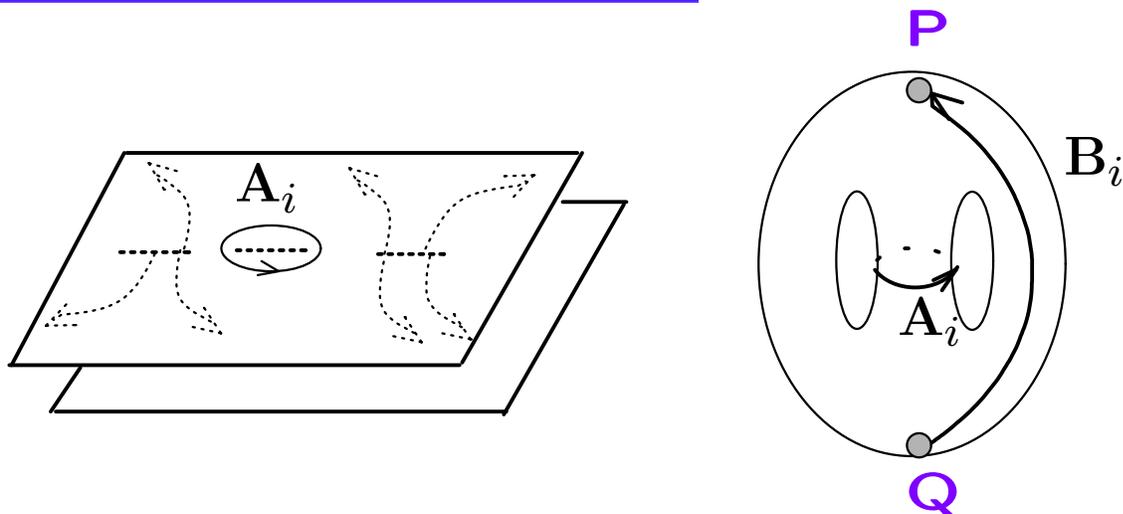
$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \mathcal{O}(x) = \frac{1}{2} [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, [\mathcal{O}, Q_{\alpha}]] \simeq 0$$

$$\langle \mathcal{O}(0) \mathcal{O}(z_1) \rangle = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \langle \mathcal{O}(0) \mathcal{O}(z_1) \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle^2$$

## 独立な Chiral Operator

$$\text{Tr}\Phi^k, \text{Tr}\Phi^k W_{\alpha}, \text{Tr}\Phi^k W_{\alpha} W^{\alpha}$$

# Purely Field Theory

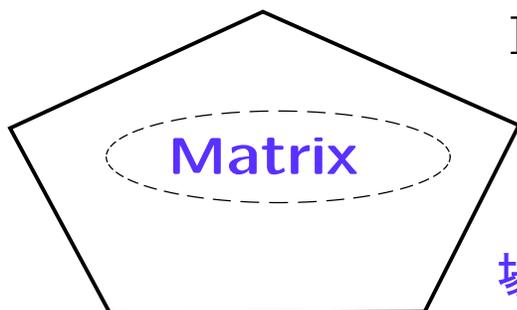


## Chiral Ringの母関数

$$T(x) = \text{Tr} \frac{1}{x - \Phi}$$

$$R(x) = -\frac{1}{32\pi^2} \text{Tr} \frac{W_\alpha W^\alpha}{x - \Phi}$$

$$y(x) = W'(x) - 2R(x)$$



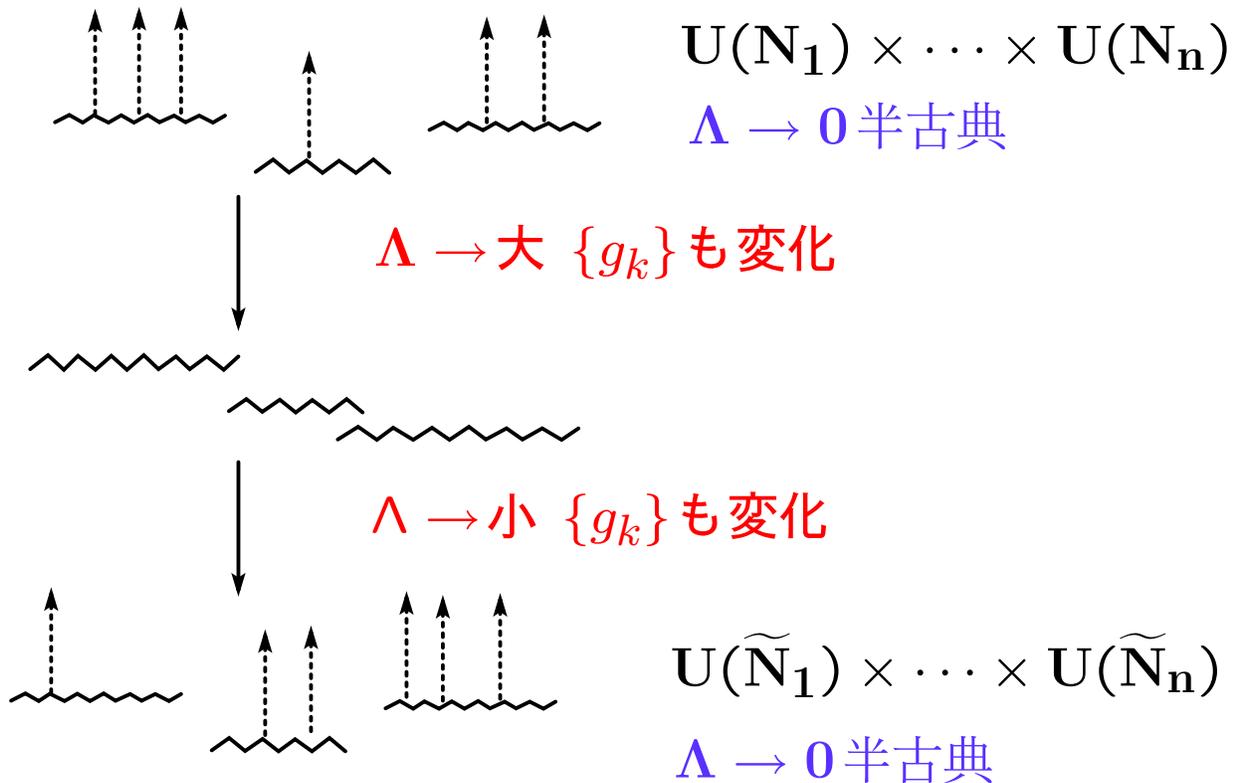
$R(x) \iff$  Resolvent

場の理論で閉じている

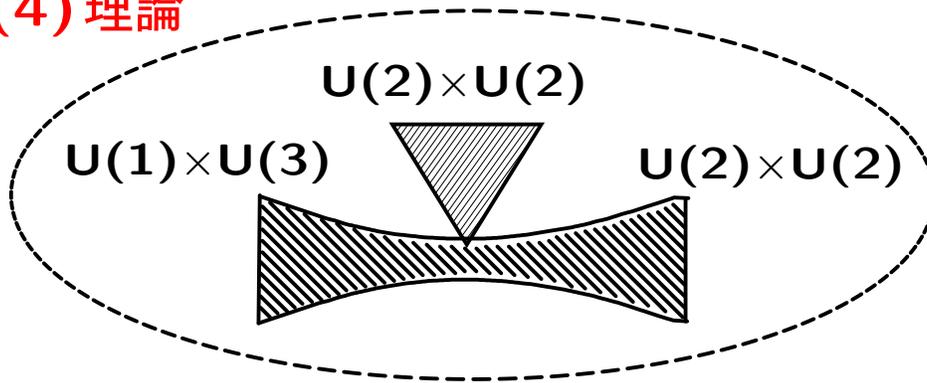
Field Theory

# New Duality

弱結合で異なる理論  $\prod U(N_i)$ 、 $\prod U(\tilde{N}_i)$  の真空が  
強結合ダイナミクスを通してつながっている



**U(4) 理論**



Flux  $\{N_i, b_i\}$  によって決まる

## 2. SO/Spの特徴

$$\Phi^{\text{SO}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \text{diag}(i\phi_1, \dots, i\phi_N)$$

$$\Phi^{\text{Sp}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \text{diag}(i\phi_1, \dots, i\phi_N)$$

$$\text{Tr} \Phi^{2k+1} = 0 \iff W_{\text{tree}} : \text{偶数次多項式}$$

$$\text{SO}(N) \longmapsto \text{SO}(N_0) \times \prod_{i=1}^n \text{U}(N_i)$$

$$\text{Sp}(N) \longmapsto \text{Sp}(N_0) \times \prod_{i=1}^n \text{U}(N_i)$$

$$\text{with } N = N_0 + \sum 2N_i$$

# Adding Flavor

$$W_{\text{tree}} = Q^i \Phi Q^j J_{ij} + m_{ij} Q^i Q^j + W(\Phi)$$

## D-term

$$[\Phi, \Phi^\dagger] = 0, \quad \text{Im}(Q_a^i Q_b^{i\dagger}) = 0$$

## F-term

$$0 = Q_a^i Q_b^j J_{ij} + W'(\Phi)_{ab}$$

$$0 = \Phi_{ab} Q_b^j J_{ij} + m_{ij} Q_a^j$$

クローンブランチ

$$Q = 0, \quad \Phi = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \otimes i\sigma_2$$

ヒッグスブランチ

$$Q \neq 0, \quad \Phi = \text{diag}(-m, a_1, a_2, \dots, a_n) \otimes i\sigma_2$$

古典的に  $\prod U(N_i)$  を得るには  $W'(-m) = 0$

### 3. 強結合からのアプローチ

$W_{\text{tree}}$  でリフトされない点  $\iff$  Massless モノポール ( $N-n$ 個)

#### Pure SO(2N)

$$P_{2N}^2 - 4x^4 \Lambda^{4N-4} = x^2 \left[ H_{2N-2n-2} \right]^2 F_{2(2n+1)}$$

#### $r = 0$ Coulomb branch for SO(2N)

$$\begin{aligned} P_{2N}(x)^2 - 4x^4 \Lambda^{4N-4-2N_f} (x^2 - m^2)^{N_f} \\ = x^2 \left[ H_{2N-2n-2} \right]^2 F_{2(2n+1)} \end{aligned}$$

#### $r$ -th Higgs branch for SO(2N)

$$\text{SWcurve} : y^2 = (x^2 - m^2)^{2r} [-]$$

$$\begin{aligned} P_{2(N-r)}(x)^2 - 4x^4 \Lambda^{4N-4-2N_f} (x^2 - m^2)^{N_f-r} \\ = x^2 \left[ H_{2N-2n-2r-2} \right]^2 F_{2(2n+1)} \end{aligned}$$

## 4. 具体例 $\Phi^4$ case

問題:簡単  $\Rightarrow$  結果:複雑  $\{N, N_f, r\}$  でいろいろ

SO(6)  $N_f = 2, r = 0$

$$P_6^2 - 4x^4\Lambda^4 (x^2 - m^2)^2 = x^2 [H_2(x)]^2 F_6(x)$$

2つの解

$$P_6 = x^2 [x^4 + Ax^2 - 2\eta\Lambda^2 m^2]$$
$$\rightarrow x^4 (x^2 - m^2), \quad \text{SO}(4) \times \text{U}(1)$$

$$P_6 = x^2 [x^4 + 2Ax^2 + (A + \eta\Lambda^2)^2 + \eta\Lambda^2 m^2]$$
$$\rightarrow x^2 (x^2 - m^2)^2, \quad \text{SO}(2) \times \text{U}(2)$$

スムーズにつながっていない

SO(7)  $N_f = 2, r = 0$

$$P_6^2 - 4x^2 \Lambda^6 (x^2 - m^2)^2 = x^2 [H_2(x)]^2 F_6(x)$$

解

$$P_6 = x^2 \left[ (x^2 - c^2)^2 + \eta \Lambda^3 \left( \frac{c^2 + m^2}{c^3} x^2 + \frac{3m^2 - c^2}{c} \right) \right]$$

$$m^2 = c^2 + \eta \Lambda^3 \frac{c^2 + m^2}{c^3}, \quad \text{Constraint}$$

2つの半古典極限  $\Lambda \rightarrow 0$

1.  $\frac{\eta \Lambda^3}{c^3}$  を一定に保ちながら

$$P_6(x) \rightarrow x^4 (x^2 - m^2), \quad \text{SO}(5) \times \text{U}(1)$$

2.  $c$  を一定に保ちながら

$$P_6(x) \rightarrow x^2 (x^2 - m^2)^2, \quad \text{SO}(3) \times \text{U}(2)$$

スムーズにつながっている

## 5. 結論

- 4d  $N=1$  SO/Sp Gauge Theory の相構造について調べた
- Addition, Multiplication Map で異なるゲージ群の相の関係を見た
- 強結合から小西アノマリー e.q. を導いた

### Futur Work

- Mass も tuning する
- $N=2$  への又は Super Coformal への極限の取り方をもっと詳しく調べるヒッグスで (Eguchi-Hori-Ito-Yang)

# Confinement Indexについて

Confinement Indexは  $\{N_0 - 2, N_i, b_i\}$  の Greatest Common Divisor

$$SO(N) \rightarrow SO(N_0) \times \prod_{i=1}^n U(N_i)$$

そのメカニズムを CSW のように説明できていない

SO/Sp の Centor は  $Z_2$



$W^r$  は mod 2 で定義される



Confinement Index 2 or 1?

すべての phase が Confining?

根拠

$$SO(N) \rightarrow \prod_{i=1}^n U(N_i), \quad U(N) \rightarrow \prod_{i=1}^n U(N_i)$$

Factrization Problem が同じ



相構造が同じ、スムーズ transition...

## 異なるランクの関係

### Addition Map

$r$  ブランチ  $\text{SO}(2N), N_f$

$$\begin{aligned} P_{2(N-r)}(x)^2 - 4x^4 \Lambda^{4N-4-2N_f} (x^2 - m^2)^{N_f-r} \\ = x^2 \left[ H_{2N-2n-2r-2} \right]^2 F_6 \end{aligned}$$

$$2(N-r) = 2(N'-r'), \quad 4N - 2N_f = 4N' - 2N'_f$$

### Multiplication Map

$$\tilde{x} = \frac{P_{2N}(x)}{2\eta x^2 \Lambda^{2N-2}}$$

$$P_{K(2N-2)+2} = 2x^2 \eta^K \Lambda^{2KN-2K} \mathcal{T}_K(\tilde{x})$$

$$P_{2N} : \text{SO}(2N) \rightarrow \text{SO}(2N_0) \times \prod_{i=1}^n \text{U}(N_i)$$

$$\begin{aligned} P_{2KN-2K+2} : \text{SO}(2KN - 2K + 2) \\ \rightarrow \text{SO}(2KN_0 - 2K + 2) \times \prod_{i=1}^n \text{U}(KN_i) \end{aligned}$$

## 性質

$$\{2N_0 - 2, N_i\} \longmapsto K\{2N_0 - 2, N_i\}$$

$SO(2N_0)$  の真空の数

$SO(\text{even}) \rightarrow SO(\text{odd})$  ナシ