

# 開弦の場の理論の モーヤル積による定式化

## Moyal formulation of open String Field Theory

岸本 功

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻素粒子論研究室

共同研究者: I.Bars, Y.Matsuo  
PRD67,066002(2003) [hep-th/0211131]  
hep-th/0302151(PRD to appear)  
hep-th/0304005

参考文献: I.Bars, Y.Matsuo, PRD66(2002)066003 [hep-th/0204260]

# Introduction and motivation

## ■ Witten's String Field Theory (1986)

$$S = \frac{1}{2} \langle \Psi, Q_B \Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle$$

Sen's conjecture,

[Sen-Zwiebach, Moeller-Taylor, ...]

VSFT conjecture,

[Rastelli-Sen-Zwiebach, ...]

で復活。

open string (D25-brane)

perturbative vacuum

$T_{25}$

nonperturbative vacuum

## ■ Oscillator approach [Gross-Jevicki(1986),...]

無限行列のいくつかの代数関係を用いた形式的な計算

⇒ しかし、素朴な計算では矛盾が生じる: twist anomaly.

[Hata-Moriyama, Hata-Moriyama-Teraguchi,...]

Neumann係数は  $\infty \times \infty$  行列なので微妙.

## ■ CFT approach [...LPP(1989),...]

CFTを用いると非自明な古典解として

$$|\Psi_0^{(l)}\rangle = Q_L \left( -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^l}{4} (w^{2l} + w^{-2l}) \right) |I\rangle + C_L \left( l^2 w^{-2} (2 - (-1)^l (w^{2l} + w^{-2l})) \right) |I\rangle.$$

などが得られる。

[...,Takahashi-Tanimoto, Kishimoto-Takahashi,...]

⇒ しかし、`Identity state'  $|I\rangle$  をwell-definedにするには  
正則化をする必要がある。

# ■ Moyal approach

[Bars(2001), Bars-Matsuo(2002)]

Wittenの \* 積 (half string approach)

→ Moyal ★ 積

および

正則化を定めた。

$$\star = \exp \left( \frac{i\theta}{2} \sum_e \left( \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_e} \overrightarrow{\partial} - \overrightarrow{\partial} \overleftarrow{\partial} \right) \right)$$

■ 他にも Moyal approach の流儀がある:

Witten の \* 積 (oscillator approach)

→ Neumann 行列の対角化

[Rastelli-Sen-Zwiebach, ...]

→ 「連続」な Moyal ★ 積

[Douglas-Liu-Moore-Zwiebach, ...]

$$\star = \exp \left( \int d\kappa i \tanh \frac{\pi\kappa}{4} \left( \frac{\overleftarrow{\partial} \quad \partial}{\partial x(\kappa) \partial p(\kappa)} - \frac{\overleftarrow{\partial} \quad \partial}{\partial p(\kappa) \partial x(\kappa)} \right) \right)$$

(必要に応じて「レベルL」による正則化をしている。)

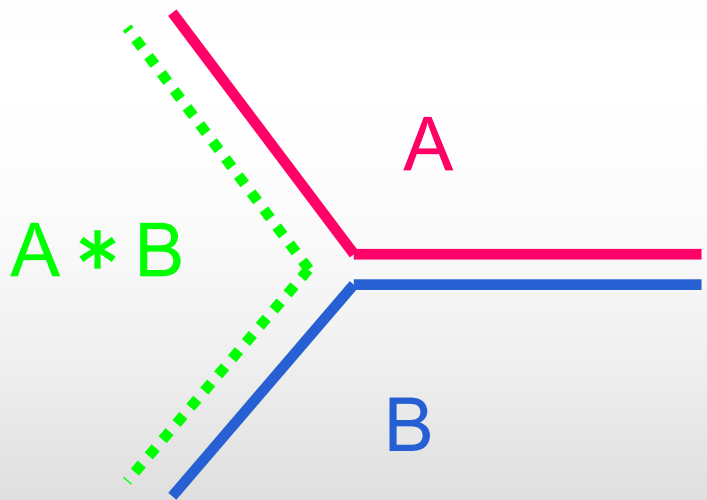
# Contents



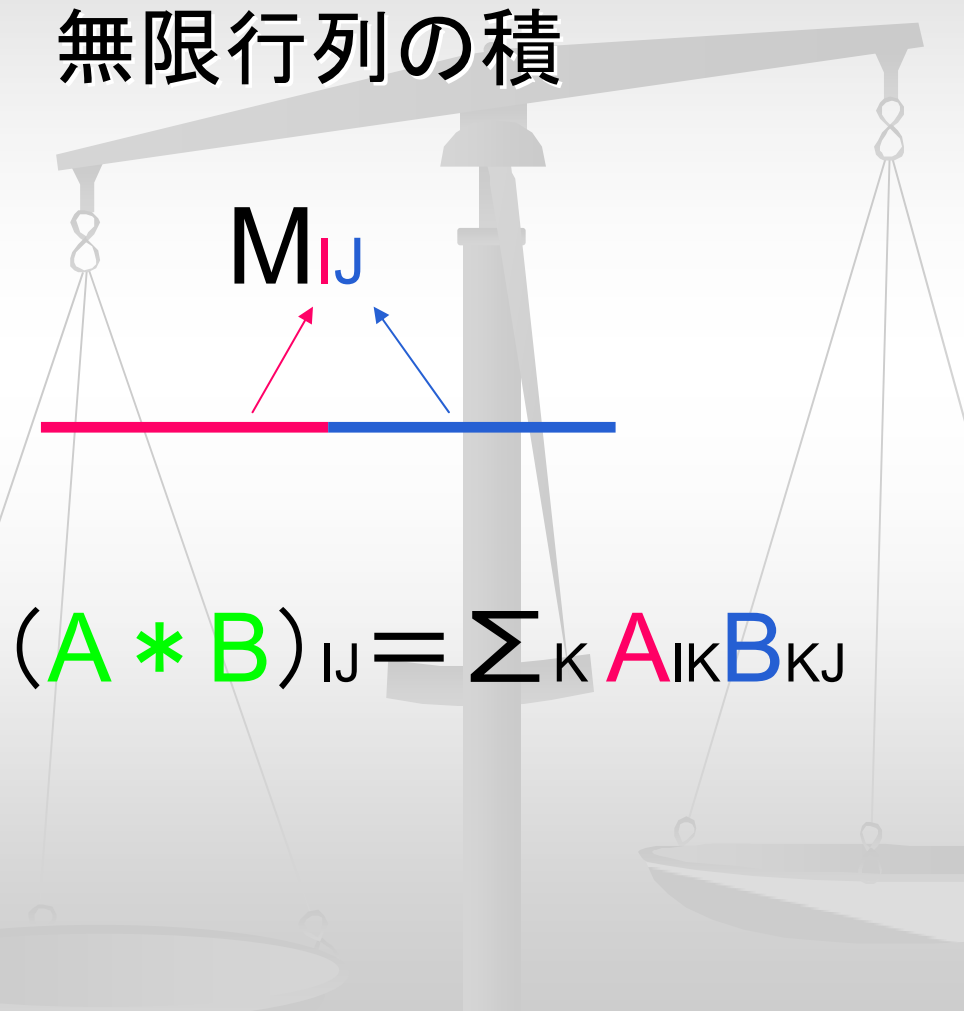
- Introduction and Motivation
- Half string and Moyal formulation
- Regularization
- Moyal String Field Theory (MSFT)
- Application 1: String amplitude
- Application 2: Splitting limit
- Summary and Discussion

# Half string and Moyal formulation

■ Wittenの \* 積 ~ 無限行列の積



~



■ 式で書くと:

$$X^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^\mu \cos n\sigma = \begin{cases} l^\mu(\sigma) & 0 \leq \sigma \leq \pi/2 \\ r^\mu(\pi - \sigma) & \pi/2 \leq \sigma \leq \pi \end{cases},$$

$$b(\sigma) = i\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{gh} \sin n\sigma = \begin{cases} l^b(\sigma) & 0 \leq \sigma \leq \pi/2 \\ r^b(\pi - \sigma) & \pi/2 \leq \sigma \leq \pi \end{cases},$$

$$c(\sigma) = c_0 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{gh} \cos n\sigma = \begin{cases} l^c(\sigma) & 0 \leq \sigma \leq \pi/2 \\ r^c(\pi - \sigma) & \pi/2 \leq \sigma \leq \pi \end{cases},$$

と右半分と左半分に分けてWittenの \* 積を

$$\Psi_1 * \Psi_2[l^\mu, l^b, l^c; r, r^b, r^c] =$$

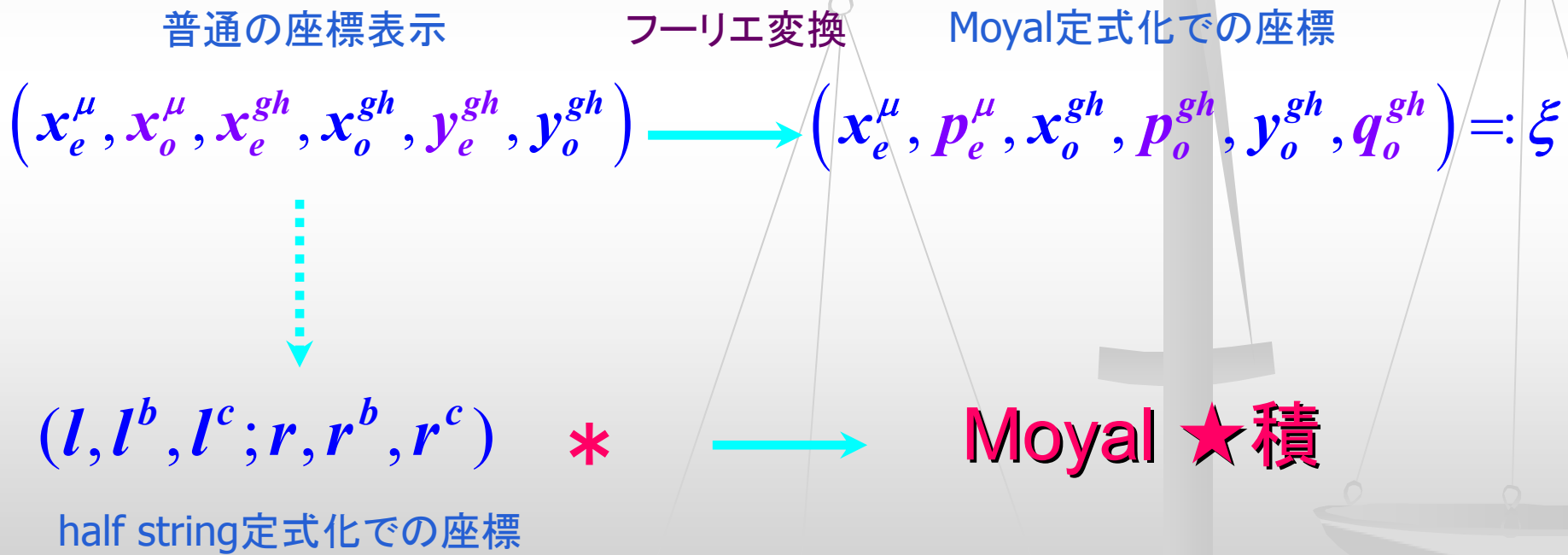
$$\int Dw^\mu Dw^b Dw^c \Psi_1[l^\mu, l^b, l^c; w^\mu, w^b, w^c] \Psi_2[w^\mu, w^b, -w^c; r^\mu, r^b, r^c]$$

のように定義する。

(ただし中点の自由度は微妙)



- 元の非零モード  $(x_n^\mu, x_n^{gh}, y_n^{gh})$  の半分  $(x_o^\mu, x_e^{gh}, y_e^{gh})$  についてフーリエ変換するとhalf-string の \* 積 が (anti-)Moyal★積にmapされる:



- 零モードも含めて弦場のmapを具体的に書くと

$$\hat{A}(\bar{x}, \xi_0, \xi)$$

$$\sim \int d^{Nd} x_0 \int dc_0 dx_e^{gh} dy_e^{gh} e^{-2ip_e T x_0} e^{-\xi_0 (c_0 - \bar{w} y_e^{gh}) + 2p_0^{gh} \bar{S} x_e^{gh} + 2q_0^{gh} R y_e^{gh}}$$

$$\times \langle \bar{x} + \bar{w} x_e, c_0, x_n, x_n^{gh}, y_n^{gh} | \Psi \rangle$$

$$\Psi(x_0^\mu, c_0, x_n^\mu, x_n^{gh}, y_n^{gh}) \Big|_{x_0^\mu = \bar{x}^\mu + w_e x_e^\mu}$$

(正則化する場合は  $n \leq 2N$  までとる。)

- ここで無限行列  $T, R, S, w, v$  を導入した:

$$T_{eo} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\sigma \cos(e\sigma) \cos(o\sigma), \quad w_e = -\sqrt{2} \cos \frac{e\pi}{2}, \quad S_{eo} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\sigma \sin(e\sigma) \sin(o\sigma),$$

$$T_{eo} = \frac{4oi^{o-e+1}}{\pi(e^2 - o^2)}, \quad R_{oe} = \frac{4e^2i^{o-e+1}}{\pi o(e^2 - o^2)}, \quad S_{eo} = \frac{4ei^{o-e+1}}{\pi(e^2 - o^2)}, \quad w_e = \sqrt{2}i^{-e+2}, \quad v_o = \frac{2\sqrt{2}i^{o-1}}{\pi o}.$$

- 無限行列の積の結合性の破れ [Bars-Matsuo]

$$R(Tv) = R \cdot 0 = 0 \quad \text{v.s.} \quad (RT)v = 1 \cdot v = v, \dots$$

計算をwell-definedにするため、正則化する必要あり。

# Regularization

- 無限行列の正則化: 有限行列へ [Bars-Matsuo]

$$R_{oe} = o^{-2} T_{eo} e^2, R_{oe} = T_{eo} + v_o w_e, v_o = \sum_e T_{eo} w_e, w_e = \sum_o R_{oe} v_o,$$

$$T_{eo} = e^{-1} S_{eo} o$$

を  $e \rightarrow \kappa_e, o \rightarrow \kappa_o$  とし  $N \times N$  行列の関係式へ:

$$R = \kappa_o^{-2} \bar{T} \kappa_e^2, \quad R = \bar{T} + v \bar{w}, \quad v = \bar{T} w, \quad w = \bar{R} v,$$

$$T = \kappa_e^{-1} S \kappa_o.$$

逆にこれを定義だと思つと

$(N, \kappa_e, \kappa_o)$  から  $T, R, S, w, v$  が **あらわに** 定まる。

■ 解いた結果は

$$T_{eo} = \frac{w_e v_o \kappa_o^2}{\kappa_e^2 - \kappa_o^2}, \quad R_{oe} = \frac{w_e v_o \kappa_e^2}{\kappa_e^2 - \kappa_o^2}, \quad S_{eo} = \frac{w_e v_o \kappa_e \kappa_o}{\kappa_e^2 - \kappa_o^2},$$

$$w_e = i^{2-e} \frac{\prod_{o'} \left| \kappa_e^2 / \kappa_{o'}^2 - 1 \right|^{1/2}}{\prod_{e' \neq e} \left| \kappa_e^2 / \kappa_{e'}^2 - 1 \right|^{1/2}}, \quad v_o = i^{o-1} \frac{\prod_{e'} \left| 1 - \kappa_o^2 / \kappa_{e'}^2 \right|^{1/2}}{\prod_{o' \neq o} \left| 1 - \kappa_o^2 / \kappa_{o'}^2 \right|^{1/2}}.$$

実際、 $f(z) = \frac{\prod_o (z^2 - \kappa_o^2)}{\prod_e (z^2 - \kappa_e^2)}$  と置くと

$$v_o^2 = \frac{2}{\kappa_o} \operatorname{Res}_{z=\kappa_o} \frac{f(z)}{f(z)}, \quad w_e^2 = \frac{2}{\kappa_e} \operatorname{Res}_{z=\kappa_e} \frac{f(z)}{f(0)}$$

などとして計算できる。  
(符号は  $N=\infty$  と consistent に決める。)

これらの有限行列は次の関係式を満たす

$$TR = 1, RT = 1, \bar{R}R = 1 + w\bar{w}, \bar{T}T = 1 - v\bar{v},$$

$$\bar{S}S = S\bar{S} = 1,$$

$$T\bar{T} = 1 - \frac{w\bar{w}}{1 + \bar{w}w}, Tv = \frac{w}{1 + \bar{w}w}, \bar{v}v = \frac{\bar{w}w}{1 + \bar{w}w},$$

$$Rw = v(1 + \bar{w}w), R\bar{R} = 1 + v\bar{v}(1 + \bar{w}w).$$

※特に  $1 + \bar{w}w = \frac{\prod_e \kappa_e^2}{\prod_o \kappa_o^2}$  はもとの無限行列に戻る極限で $\infty$

# Moyal string field theory (MSFT)

## ■ セットアップ

$$(N, \kappa_e, \kappa_o), e=2,4,\dots,2N, o=1,3,\dots,2N-1$$

2N個のfrequencies

→ 正則化された行列T,R,S,w,vが決まる。

## ■ Moyal Field

$$\hat{A}(\bar{x}, \xi_0, \xi)$$

d+1個 (zeromode) + (2Nd+4N)個の変数

非可換座標

※  $\kappa_e=e, \kappa_o=0, N \rightarrow \infty$ の極限(open string limit)で通常の場合に戻る。

# ■ 作用 (WittenのSFTのゲージ固定した作用の正則化)

$$S = -\int d^d \bar{x} \text{Tr} \left( \frac{1}{2} A \star (L_0 - 1) A + \frac{1}{3} A \star A \star A \right),$$

$$\star = \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial \xi} \sigma \frac{\bar{\partial}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial \xi^{gh}} \Sigma \frac{\bar{\partial}}{\partial \xi^{gh}} \right),$$

$$\text{Tr} = \frac{\det^{1/2} \Sigma}{\det^{d/2} \sigma} \int \frac{d^{2Nd} \xi}{(2\pi)^{Nd}} d^{2dN} \xi d^{4N} \xi^{gh},$$

$$L_0 = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{4} \bar{D}_\xi M_0^{-1} \tilde{K} D_\xi + \bar{\xi} \tilde{K} M_0 \xi$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \xi^{gh}} M_0^{gh-1} \tilde{K}^{gh} \frac{\partial}{\partial \xi^{gh}} + \bar{\xi}^{gh} \tilde{K}^{gh} M_0^{gh} \xi^{gh} - \frac{d-2}{2} \sum_{n=1}^{2N} K_n.$$

ここでSiegelゲージをとっている:  $\hat{A}(\bar{x}, \xi_0, \xi) = \xi_0 A(\bar{x}, \xi)$



# Neumann coefficients [BM2,BKM3]

- MSFTではノイマン行列は必要ないが  
対応物を**定義**できる: operator形式との比較

$$\int d^d \bar{x} \int d\xi_0^{(1)} d\xi_0^{(2)} d\xi_0^{(3)} \text{Tr}(A_1 \star A_2 \star A_3) \sim \langle \Psi_1 | \langle \Psi_2 | \langle \Psi_3 | V_3 \rangle,$$

$$|V_3\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} a^{r\dagger} V^{rs} a^{s\dagger} - a^{r\dagger} V_{0rs} p^s - \frac{1}{2} V_{00} p^r p^r - c^{r\dagger} X^{rs} b^{s\dagger} - c^{r\dagger} X_{0rs} b_0\right) |p\rangle$$

という同一視をすると、MSFTの言葉 ( $N, \mathcal{K}_e, \mathcal{K}_o$ ) であらわにノイマン行列を表せる。

- MSFTでは任意の $(N, \kappa_e, \kappa_o)$  で

$$V^{rr} = C \frac{\tilde{m}_0^2 - 1}{\tilde{m}_0^2 + 3}, \dots, X^{rr} = \sqrt{\kappa} \frac{\tilde{m}_0^2 - 1}{3\tilde{m}_0^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{\kappa}}, \dots,$$

$$\tilde{m}_0^2 = \begin{pmatrix} \kappa_e^{1/2} T \kappa_o^{-1} \bar{T} \kappa_e^{1/2} & 0 \\ 0 & \kappa_o^{-1/2} \bar{T} \kappa_e T \kappa_o^{-1/2} \end{pmatrix}, \dots$$

はGross-Jevickiの非線形関係を満たす。

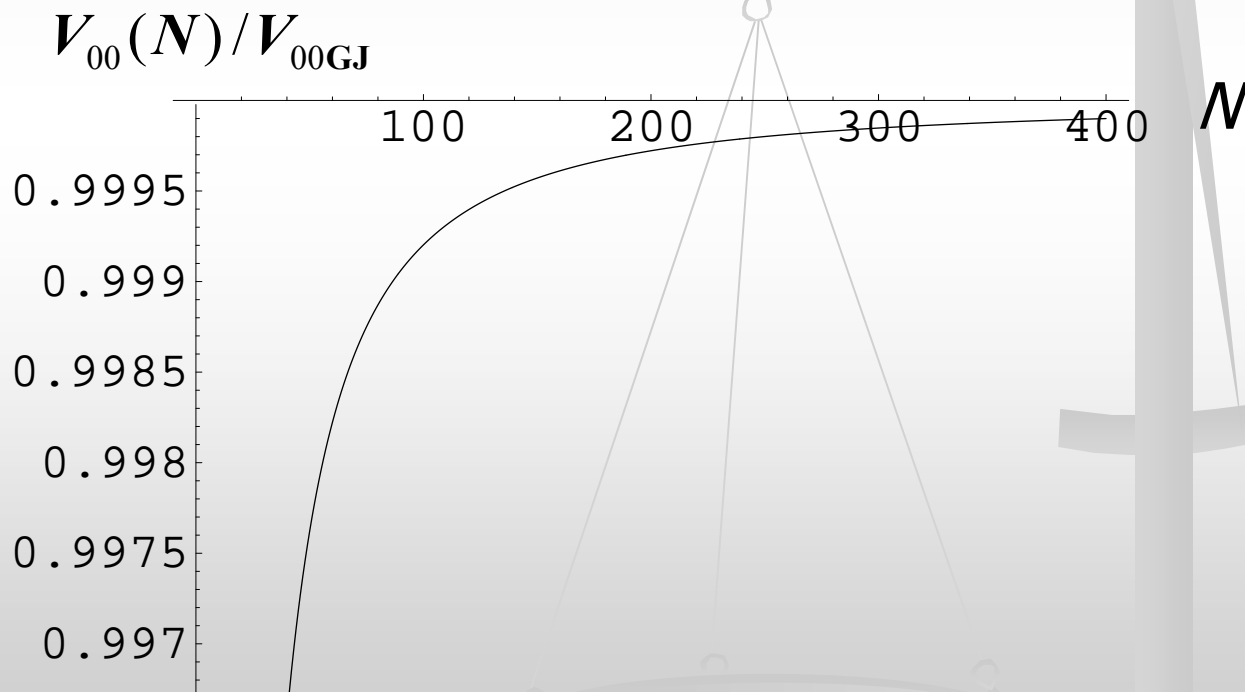
- $\kappa_e = e, \kappa_o = 0, N \rightarrow \infty$ でのノイマン行列の(数值的)振る舞い: (成分毎に)

$$\frac{V^{rs}(N)}{V_{GJ}^{rs}} \sim 1 + (\text{const.}) N^{-4/3}, \quad \frac{X^{rs}(N)}{X_{GJ}^{rs}} \sim 1 + (\text{const.}) N^{-2/3}$$

## ■ たとえば

$$V_{00} = \bar{w} T \kappa_o^{-1} \bar{T} (3 + \kappa_e T \kappa_o^{-1} \bar{T})^{-1} \boldsymbol{w} \quad \leftrightarrow \quad V_{00\text{GJ}} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{27}{16} \right)$$

の比の振る舞いは



# Application 1: String amplitude [BKM1]

MSFTの作用:  
からFeynman則を考える。

$$S = -\int d^d \bar{x} \text{Tr} \left( \frac{1}{2} A \star (L_0 - 1) A + \frac{1}{3} A \star A \star A \right)$$

external state: monoid element (Gaussian)を考えれば十分

$$A_{p, \mathcal{N}, M, \lambda}(\xi) = \mathcal{N} e^{ip\bar{x}} e^{-\bar{\xi} M \xi - \bar{\xi} \lambda} e^{-\bar{\xi}^{gh} M^{gh} \xi^{gh} - \bar{\xi}^{gh} \lambda^{gh}}.$$

(必要に応じて  $\lambda$  で適当に微分すればよい)

特に perturbative vacuumは  $c_1 |\Omega\rangle \leftrightarrow A_0(\xi) = e^{-\bar{\xi} M_0 \xi} e^{-\bar{\xi}^{gh} \epsilon M_0^{gh} \xi^{gh}}$

$\tau$ -evolved monoid element (プロパゲータがくっついたとき)

$$e^{-\tau L_0} \left( \mathcal{N} e^{ip\bar{x}} e^{-\bar{\xi} M \xi - \bar{\xi} \lambda} e^{-\bar{\xi}^{gh} M^{gh} \xi^{gh} - \bar{\xi}^{gh} \lambda^{gh}} \right) = \mathcal{N}(\tau) e^{ip\bar{x}} e^{-\bar{\xi} M(\tau) \xi - \bar{\xi} \lambda(\tau)} e^{-\bar{\xi}^{gh} M^{gh}(\tau) \xi^{gh} - \bar{\xi}^{gh} \lambda^{gh}(\tau)},$$

$$M(\tau) = \left[ \sinh \tau \tilde{\kappa} + \left( \sinh \tau \tilde{\kappa} + M_0 M^{-1} \cosh \tau \tilde{\kappa} \right)^{-1} \right] (\cosh \tau \tilde{\kappa})^{-1} M_0, \dots$$

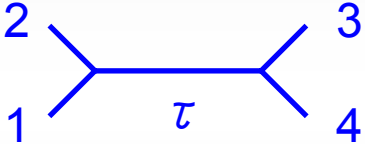
これも再びGaussian

Vertex: Moyal積をとる「非可換空間」上の場の理論

$$A_1(\xi) \star A_2(\xi), \quad A_1(\xi) \star A_2(\xi) \star A_3(\xi), \dots$$

Gaussian同士のMoyal積もGaussian

例: 4-tachyon amplitude



$$= \int d^d \bar{x} \text{Tr} \left( e^{-\tau L_0} \left( A_1 \star A_2 \right) \star A_3 \star A_4 \right)$$

$$\sim \delta^d(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \frac{\det \left( 1 - \left( \frac{\bar{t}t - 1}{1 + 3\bar{t}t} e^{-\kappa_e \tau} \right)^2 \right) \det \left( 1 - \left( \frac{\bar{t}t - 1}{1 + 3\bar{t}t} e^{-\kappa_o \tau} \right)^2 \right)}{\left[ \det \left( 1 - \left( \frac{\bar{t}t - 1}{3 + \bar{t}t} e^{-\kappa_e \tau} \right)^2 \right) \det \left( 1 - \left( \frac{\bar{t}t - 1}{3 + \bar{t}t} e^{-\kappa_o \tau} \right)^2 \right) \right]^{d/2}}$$

$$\times \exp \left( -\frac{1}{2} (p_1 + p_2)^2 (\tau + \alpha(\tau)) + (p_1 + p_3)^2 \beta(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 p_i^2 \gamma(\tau) \right), \quad t = \kappa_e^{1/2} T \kappa_o^{-1/2}, \dots$$

## フーリエ変換した座標(η)では...

External state :

も再びGaussian

$$\tilde{A}(\eta) = \int \frac{d^{2Nd} \xi}{(2\pi)^{2Nd}} d^{4N} \xi^{gh} e^{-i\bar{\xi}\eta} e^{\bar{\xi}^{gh}\eta^{gh}} A_{p, \mathcal{N}, M, \lambda}(\xi)$$

Vertex :

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i < j} \bar{\eta}_i \sigma \eta_j - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \bar{\eta}_i^{gh} \Sigma \eta_j^{gh}\right) \delta^{2Nd}(\eta_1 + \dots + \eta_n) \delta^{4N}(\eta_1^{gh} + \dots + \eta_n^{gh})$$

Moyal積からくるphase factorがつく。←非可換場の理論と同様

Propagator :  $\Delta(\eta, \eta', \tau, p) := \int \frac{d^{2Nd} \xi}{(2\pi)^{2Nd}} d^{4N} \xi^{gh} (e^{-i\bar{\xi}\eta} e^{\bar{\xi}^{gh}\eta^{gh}}) e^{-\tau L_0(p)} (e^{i\bar{\xi}\eta'} e^{-\bar{\xi}^{gh}\eta'^{gh}})$

※「普通」の非可換場の理論と違って  $\eta - \eta'$  の関数ではないがGaussian

1-loop vacuum amplitude:  $\int d^d p \text{Tr} e^{-\tau L_0} = \int d^d p \int d^{2Nd} \eta d^{4N} \eta^{gh} \Delta(\eta, \eta, \tau, p)$

$$= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \tau^{-\frac{d}{2}} \prod_{e>0} (1 - e^{-\tau \kappa_e})^{-(d-2)} \prod_{o>0} (1 - e^{-\tau \kappa_o})^{-(d-2)}$$

※  $\kappa_e = e, \kappa_o = o, N = \infty$  で正しいスペクトラムを再現。

# Application 2: Splitting limit [BKM2]

N:有限でも運動方程式:  $(L_0 - 1)A + A \star A = 0$

をそのまま解くことは難しい(∵ Moyal積の非線形方程式)が、  
**splitting limit:  $\kappa_e = \kappa_o$**  では厳密に解ける。 実際

$$(L_0 - 1)A = \mathcal{L}_0 \star A + A \star \mathcal{L}_0 + \gamma A,$$

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{e>0} \kappa_e (\beta_{-e} \star \beta_e + \beta_{-e}^b \star \beta_e^c + \beta_{-e}^c \star \beta_e^b) - \nu,$$

$$\gamma \sim \frac{w_e w_{e'}}{1 + \bar{w}w} (\text{oscillators})_{ee'}, \nu = \frac{1}{2} - \frac{d-2}{4} \left( \sum_{e>0} \kappa_e - \sum_{o>0} \kappa_o \right)$$

と書き直せるが **splitting limit**では $w_e=0$ より $\gamma$ の項が消える!

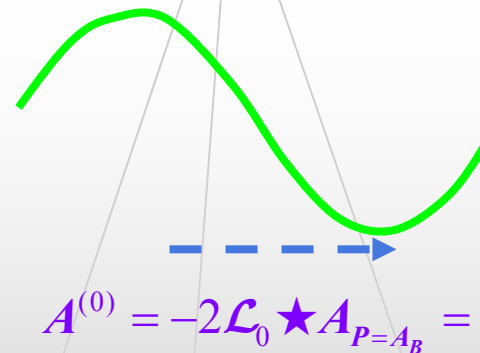
■ splitting limitでのe.o.m.  $\mathcal{L}_0 \star A + A \star \mathcal{L}_0 + A \star A = 0$

の厳密解:  $A_P = -2\mathcal{L}_0 \star P, P \star P = P, P \star \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0 \star P.$

特にP=butterfly

$$A_B = 2^{N(d-2)} e^{-\bar{x}_e \frac{\kappa_e}{2} x_e - \bar{p}_e \frac{2}{\kappa_e} p_e} e^{-ix_e^b \kappa_e x_e^c - ip_e^b \frac{4}{\kappa_e} p_e^c} \sim |0\rangle\langle 0|$$

の場合の解のまわりでは元のtachyon mass<sup>2</sup>  $-2\nu$  が  $2\nu$  にシフトする:  
 ``tachyon vacuum (!?)``



※VSFTのe.o.m.(matter部分)  $A * A = A$  はMoyalのoscillatorを無視したもの。  
 $\Rightarrow -2\mathcal{L}_0$  を 1 とするとVSFTの解: Projector



- splitting limitからのズレ(中点の自由度の効果):  
 $\gamma$  項を摂動的に扱おうと

$$\mathcal{L}_0' \star A^{(k)} + A^{(k)} \star \mathcal{L}_0' = -\gamma A^{(k-1)} - \sum_{l=1}^{k-1} A^{(l)} \star A^{(k-l)},$$

$$\mathcal{L}_0' = \mathcal{L}_0 + A^{(0)} = \mathcal{L}_0 + 2\nu A_B,$$

を解いて解  $A = A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + \dots$  を求めればよい。

- 摂動の1次では:
 
$$A^{(1)} = \frac{d-2}{4} \delta A_B + \dots, \quad \delta = \frac{\sum_{e>0} \kappa_e w_e^2}{1 + \bar{w}w}$$

open string limit :  $\kappa_e = e, \kappa_0 = 0, N = \infty$  で発散。

⇒ 素朴にはsplitting limitからの摂動としては扱えない！

# Summary and Discussion

## まとめ

- MSFTはopen string limitでWittenのSFTを再現する正則化だと期待できる：  
N:有限とする限り途中計算はwell-defined、perturbative spectrumの一致、Neumann行列の一致。
- Splitting limitを考えるとMSFTの解が厳密に求まる。

## 課題

- 原理的な問題:

MSFTだけで閉じた定式化にするために:

物理的状态を指定するためのBRST operator (Virasoro) をどう記述すればよいか?

ゲージ不変な作用の構成(?)

Super string field theoryへの拡張は?

- 技術的な問題:

Veneziano amplitudeなどをMSFTの処方箋で解析的に再現していることを示す。

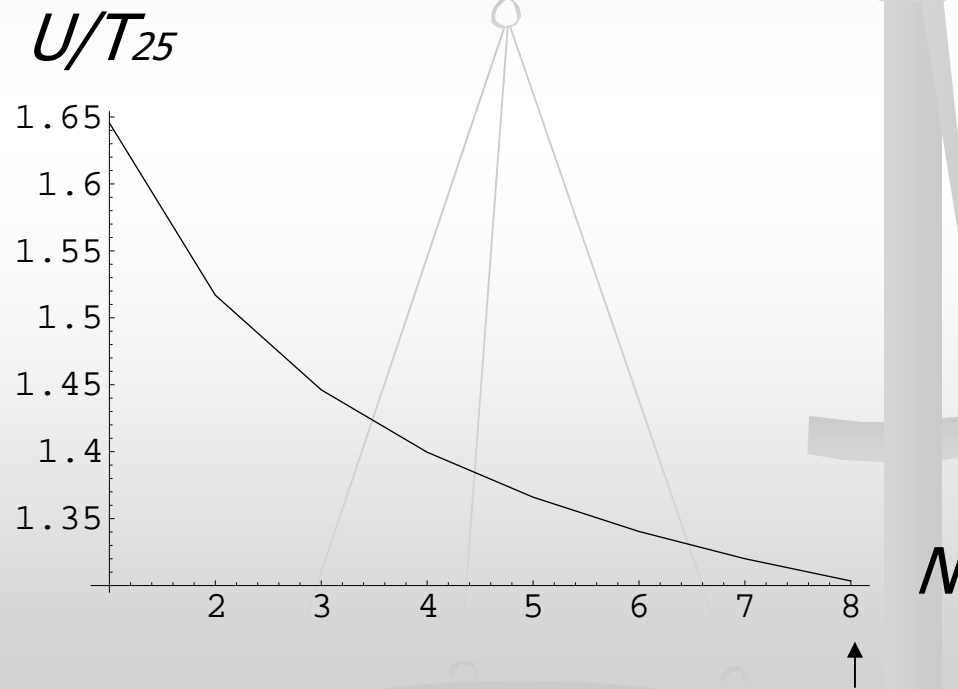
Open string limitでの非自明な厳密解の構成。

それがだめでも近似の良い方法は?

# Variational method (数値実験)

- ( $\xi$  の2次式)  $\times$  Gaussian

のansatzのもとでpotential height (D25-brane tensionとのratio)を数値的に評価:



145個のパラメータを振った。

# Truncated Virasoro/BRST operator

- 素朴にoscillatorをMで切る(  $\langle \alpha_n, b_n, c_n \rangle |_{|n| \leq M}$  へ制限すると、

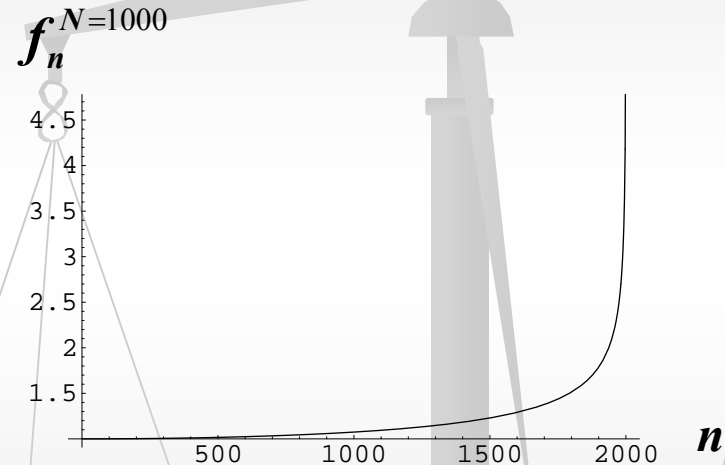
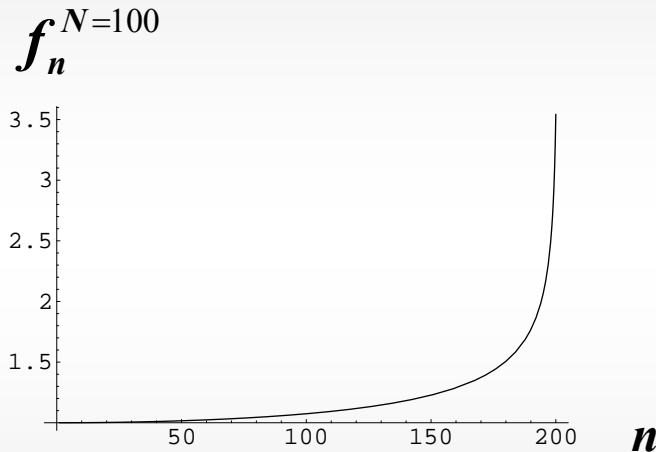
$$\begin{aligned}
 Q_B^2 = & - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^m c_{-m} c_n \sum_{k=M-n+1}^M (n+k) \alpha_{m-n-k} \alpha_k - \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^{n-1} c_{-m} c_n \sum_{k=M-m+1}^M (m+k) \alpha_{-k} \alpha_{m-n+k} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{|m| \leq M, |n| \leq M, M < |m+n|} c_{-m} c_{-n} [L_m^{\text{matter}}, L_n^{\text{matter}}] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{|n|, |m|, |k|, |m+n|, |m+n+k| \leq M, \\ \{M < |m+n-k| \text{ or } M < |m-n+k| \text{ or } M < |m-n-k|\}}} (m-n)(k-m-n) : c_{-n} c_{-m} c_{-k} b_{m+n+k} : \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M c_{-m} c_m \left( \frac{26-d}{6} m^3 + \frac{d-2-24a_0}{6} m \right)
 \end{aligned}$$

なのでさらにM/3に制限した空間では(iff  $d=26, a_0=1$ で)ベキ零。  
 → この空間で $Q_B$ がderivationになっているか？ (計算中)

# Truncation ?

実は $N=\infty$ の極限はかなり微妙

$\kappa_e = e, \kappa_o = 0$  とすると  $v_o^{(N)} = v_o^{(\infty)} / f_o^N, w_e^{(N)} = w_e^{(\infty)} f_e^N$



有限レベルに限ったところをみて、 $N \rightarrow \infty$ にすると収束するが  
(弱い意味での収束)、  
ノイマン行列のノルムなど「強い意味」では収束していない。  
同様な問題は従来のレベルランケーションにも存在する。

[I.Ellwood-J.Shelton-W.Taylor]