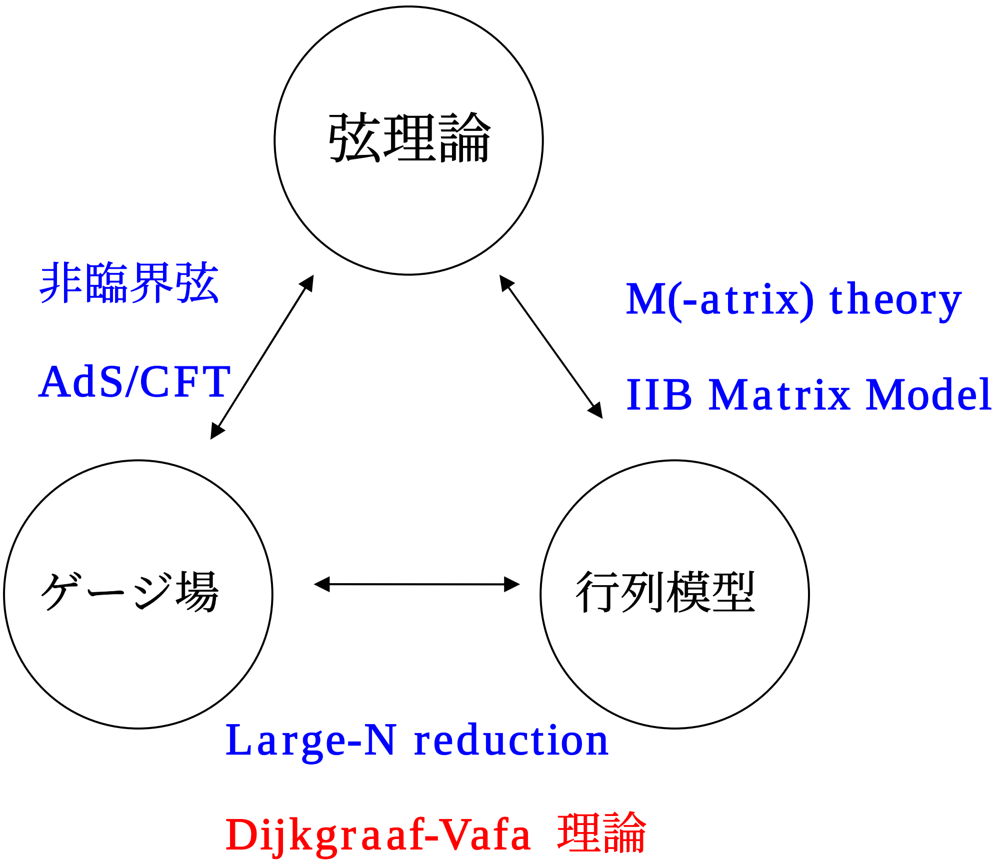
# Dijkgraaf-Vafa theory and large-N reduction

**理研**　2003 年4月　　川　合　光

黒木、森田氏との共同研究。

## 1. Introduction

弦理論 - ゲージ理論 - 行列模型　の関係



## 2．Dijkgraaf-Vafa 理論

Dijkgraaf-Vafa.

ゲージ理論 ⇔ (topological) string ⇔ large-N 行列模型

Cachazo, Douglas, Seiberg, Witten.

直接　ゲージ理論 ⇔ large-N 行列模型　を示せる。

### 考える理論

U(N) をゲージ群としてもつ

$\mathcal{N}=1$ super Yang-Mills + adjoint matter $\phi$ :

$$S=\int d^4xd^4\theta Tr(\bar{\phi}e^V\phi e^{-V})+\int d^4xd^2\theta\frac{1}{4g^2}Tr(W_\alpha W^\alpha)+\int d^4xd^2\theta Tr(W(\phi))+c.c$$

ここでは、一般のポテンシャル $W(\phi)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g_k}{k+1}\phi^{k+1}$ を考える。

U(N)の N は有限でよい。

この理論に対応して次のような作用をもつ、１つの $\hat{N}\times\hat{N}$ エルミート行列 M に対する理論を考える。

$$S=-\frac{\hat{N}}{g_m}TrW(M)$$

ここで、W は上のゲージ理論と同じものをとる。$\hat{N}$ は無限大にする極限をとる。

## 結論

$$-\frac{1}{32\pi^2}\left\langle Tr\left(\frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\phi}\right)\right\rangle \simeq \frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle Tr\left(\frac{1}{z-M}\right)\right\rangle$$

## 基本方針

両辺の量が同じ **Schwinger-Dyson eq.** を満たすことを示す。

# 行列模型の Schwinger-Dyson eq.

$$\int dM\, Tr\left(t^a \frac{1}{z-M}\right)\exp(-\frac{\hat{N}}{g_m}TrW(M))$$ の被積分関数で

**M** のシフト $M \to M + t^a$ をしても値は変わらないから、

$$0 = \int dM\, Tr\left(t^a \frac{1}{z-M} t^a \frac{1}{z-M}\right)\exp(-\frac{\hat{N}}{g_m}TrW(M))$$
$$-\frac{\hat{N}}{g_m}\int dM\, Tr\left(t^a \frac{1}{z-M}\right)Tr\left(t^a W'(M)\right)\exp(-\frac{\hat{N}}{g_m}TrW(M))$$

**U(N)の Gell-Mann 行列に対する完全性の式**

$$\sum_a Tr(t^a A)Tr(t^a B) = Tr(AB)$$ および

$$\sum_a Tr(t^a A t^a B) = Tr(A)Tr(B)$$ より以下を得る。

$$0 = \int dM\, Tr\left(\frac{1}{z-M}\right)Tr\left(\frac{1}{z-M}\right)\exp(-\frac{\hat{N}}{g_m}TrW(M))$$
$$-\frac{\hat{N}}{g_m}\int dM\, Tr\left(\frac{1}{z-M}W'(M)\right)\exp(-\frac{\hat{N}}{g_m}TrW(M))$$

ここで、$\hat{N} \to \infty$ での factorization を使うと、

$$\left(\frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle Tr(\frac{1}{z-M})\right\rangle\right)^2 = \frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle Tr(\frac{1}{z-M}W'(M))\right\rangle$$ を得る。

## superYang-Mills の Schwinger-Dyson eq.

$$\int [d\phi]\, Tr\left( t^a \frac{W_\alpha(y_0,\theta_0)W^\alpha(y_0,\theta_0)}{z-\phi(y_0,\theta_0)} \right) \exp(-S)$$ の被積分関数で

$\phi$ のシフト $\phi(y,\theta) \to \phi(y,\theta) + \delta^4(y-y_1)\delta^2(\theta-\theta_1)t^a$ をしても値は変わらないから、

$$0 = \int [d\phi]\, Tr\left( t^a \frac{W_\alpha(y_0,\theta_0)W^\alpha(y_0,\theta_0)}{z-\phi(y_0,\theta_0)} \delta^4(y_0-y_1)\delta^2(\theta_0-\theta_1)t^a \frac{1}{z-\phi(y_0,\theta_0)} \right) \exp(-S)$$

$$-\int [d\phi]\, Tr\left( t^a \frac{W_\alpha(y_0,\theta_0)W^\alpha(y_0,\theta_0)}{z-\phi(y_0,\theta_0)} \right) Tr\left(t^a W'(\phi(y_1,\theta_1)\right) \exp(-S)$$

＋kinetic term の寄与

ここで、$\phi$ の kinetic term の寄与は $\theta_0 = \theta_1$ と置くと消える。

すなわち $\phi_1, \phi_2$ ,..が chiral super field の時 $\left\langle \overline{D}X\, \phi_1 \phi_2 \cdots \right\rangle = 0$.

素朴には U(N)の Gell-Mann 行列に対する完全性の式より、

$$0 = \delta^4(y_0-y_1)\delta^2(\theta_0-\theta_1)\int [d\phi]\, Tr\left( \frac{W_\alpha(y_0,\theta_0)W^\alpha(y_0,\theta_0)}{z-\phi(y_0,\theta_0)} \right) Tr\left( \frac{1}{z-\phi(y_0,\theta_0)} \right) \exp(-S)$$

$$-\int [d\phi]\, Tr\left( \frac{W_\alpha(y_0,\theta_0)W^\alpha(y_0,\theta_0)}{z-\phi(y_0,\theta_0)} W'(\phi(y_1,\theta_1)) \right) \exp(-S)$$ となり、

ここで、$y_0 = y_1$, $\theta_0 = \theta_1$ と置きたいが、$\delta^4(0)\delta^2(0)$ が出てしまう。

結局、 $\left.\frac{\delta\phi^a(y,\vartheta)}{\delta\phi^b(y',\vartheta')}\right|_{y=y',\theta=\vartheta'}$ をきちんと評価する必要がある。

もう少し一般的に、$\phi^i$ がゲージ群の表現行列 $T^a$ をもつ表現だとする。heat kernel その他でゲージ不変に評価すると、

$$\left.\frac{\delta\phi^i(y,\vartheta)}{\delta\phi^j(y',\vartheta')}\right|_{y=y',\theta=\vartheta'} = -\frac{1}{32\pi^2}((W_\alpha{}^a T^a)^2)_{i,j}$$ であることが分かる。

よって、adjoint 表現の場合は、

$$t^a \left.\frac{\delta\phi^a(y,\vartheta)}{\delta\phi^b(y',\vartheta')}\right|_{y=y',\theta=\vartheta'} = -\frac{1}{32\pi^2}\left[W_{\alpha,}\left[W^\alpha, t^b\right]\right]$$ となる。

これを使うと、

$$0 = -\frac{1}{32\pi^2}\int[d\phi]\,Tr\left(t^a\frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\phi}\left[W_{\alpha,}\left[W^\alpha, t^a\right]\right]\frac{1}{z-\phi}\right)\exp(-S)$$

$$-\int[d\phi]\,Tr\left(\frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\phi}W'(\phi)\right)\exp(-S)$$ であることが分かる。

トレースの中に $W_\alpha$ が３個以上入ったものはゼロであることがいえるので、

$$0 = -\frac{1}{32\pi^2}\int[d\phi]\,Tr\left(\frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\phi}\right)Tr\left(\frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\phi}\right)\exp(-S)$$

$$-\int[d\phi]\,Tr\left(\frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\phi}W'(\phi)\right)\exp(-S)$$ が得られる。

chiral operator の factorization を使うと、

$$\left(-\frac{1}{32\pi^2}\left\langle Tr(\frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\phi})\right\rangle\right)^2 = -\frac{1}{32\pi^2}\left\langle Tr(\frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\phi}W'(\phi))\right\rangle$$ を得る。

以上によって

$\frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle Tr\left(\frac{1}{z-M}\right)\right\rangle$ と $-\frac{1}{32\pi^2}\left\langle Tr\left(\frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\phi}\right)\right\rangle$ が

同じ Schwinger-Dyson eq. をみたすことが分かった。

ある意味で、

場の理論 ⇔ 0 次元行列模型

が成り立つ。（DV reduction とよぶ。）

これは、large-N reduction

large-N の場の理論 ⇔ 0 次元へ reduce した理論

と似ている。

実は、DV reduction は large-N reduction から導ける。

## ３．Large-N reduction

### twisted reduced model と 非可換空間上の場の理論

### 非可換空間

自由度 D/2 の量子系の D/2 個の運動量と D/2 個の座標の線形結合を適当に並べたものを、$\hat{p}_\mu$ ( $\mu = 1 \cdots D$ ) とする。

$\hat{p}_\mu$ どうしの交換子は c-数だから、

$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = iB_{\mu\nu} 1 \quad (\mu,\nu = 1 \cdots D) \ , \quad B_{\mu\nu} \in R \ , \quad rank\ B = D$$

となる。

ここでは使わないが、D 次元回転で B は標準形

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 & & & & \\ b_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -b_2 & & \\ & & b_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

にできる。

B の逆行列を$\theta$とし、$\hat{x}^\mu$ を下式で定義。

$$\theta^{\mu\nu} B_{\nu\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda$$

$$\hat{x}^\mu = -\theta^{\mu\nu} \hat{p}_\nu$$

$\hat{x}^\mu$ , $\hat{p}_\nu$ は次の交換関係を満たす。

$$[\hat{p}_\mu, \hat{x}^\nu] = i\delta_\mu^\nu \quad [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = -i\theta^{\mu\nu} \quad [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = iB_{\mu\nu}$$

$\hat{x}^\mu$ を非可換空間の座標とみなすと、場は演算子と 1 対 1 に対応する。

## Weyl ordering

演算子 $\hat{O}$ ⇔ $x^\mu$ の関数 $O(x)$

$$O(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{O}(k)$$

$$\hat{O} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \tilde{O}(k)$$

（おおざっぱには $\hat{O} = O(\hat{x})$.）

この対応で、

hermite 演算子 ⇔ 実関数.

## mapping rule

### （１）積と＊積

$$\hat{O}_1 \leftrightarrow O_1(x)$$
$$\hat{O}_2 \leftrightarrow O_2(x)$$

ならば $\hat{O}_1\hat{O}_2 \leftrightarrow O_1 * O_2(x)$.

ここで、

$$O_1 * O_2(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial z^\nu}} O(y)O(z)\Big|_{y=x,\, z=x}.$$

### （２）trace と空間積分

$\hat{O} \leftrightarrow O(x)$ ならば

$$Tr(\hat{O}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}\sqrt{\det(\theta)}} \int d^D x\, O(x).$$

### （３）$\hat{p}_\mu$ との交換子と空間微分

$\hat{O} \leftrightarrow O(x)$ ならば $[\hat{p}_\mu, \hat{O}] \leftrightarrow i\partial_\mu O(x)$.

## 行列模型（twisted reduced model）

無限次元行列$\hat{\phi}$を力学変数とする理論

$$S = Tr(\frac{1}{2}[\hat{p}_\mu, \hat{\phi}]^2 + V(\hat{\phi}))$$

を考える。ここで、$\hat{p}_\mu$ は Heisenberg の交換関係 $[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = iB_{\mu\nu}$ の既約な表現とし、$\hat{\phi}$は $\hat{p}_\mu$ で生成される代数の中にあるとする。

mapping rule より、

$$S = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}\sqrt{\det\theta}} \int d^D x \left( \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right)_*$$

と書けるが、これは、非可換空間上の実スカラー場の作用とみなせる。

$\hat{p}_\mu$ が既約でなく、既約な $\hat{p}_\mu^{(0)}$ と $n \times n$ 単位行列 $1_n$ を使って $p_\mu = p_\mu^{(0)} \otimes 1_n$ とかけるときは、$S$ は非可換空間上の $n \times n$ エルミート行列値スカラー場の作用

$$S = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}\sqrt{\det\theta}} \int d^D x \left( tr\left( \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right) \right)_*$$

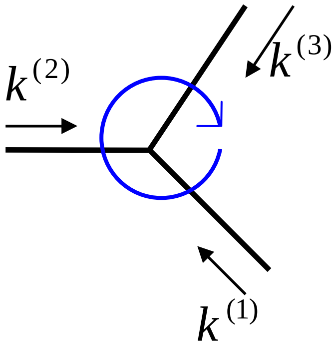
とみなせる。

# 非可換空間上の場の理論

## Feynman rule

普通の場と同じ

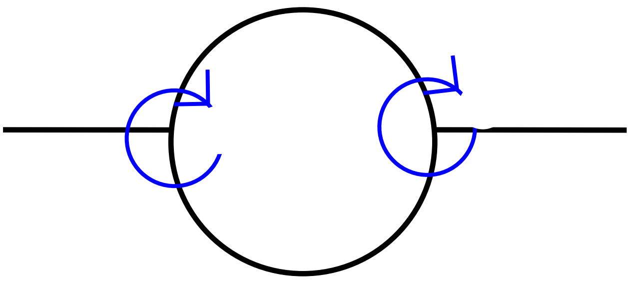
$$\int d^D x\ A * B = \int d^D x\ AB$$




$$g\ e^{i\theta^{\mu\nu}k_\mu^{(1)}k_\nu^{(2)}}$$

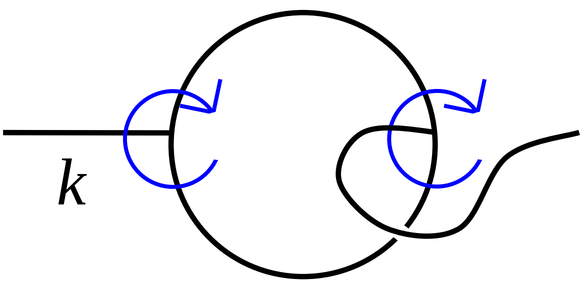
Non-Commutative phase

## planar diagrams



NCphase は cancel

## non-planar diagrams




NCphase は cancel

しない。

$k >> |B|$ のとき、ゼロに。

外線運動量 >> |B| のとき planar diagram だけきく。

⇒ large-N theory と等価。

Gonzales-Arroyo and Okawa

外線運動量 << |B| のとき、古典論的には可換空間上の場と同じだが、量子論的には要注意。

non-planar diagram の effective な UV cut off は

$\dfrac{1}{|\theta^{\mu\nu}k_\nu|}$ の程度 ($k$ は typical な外線運動量) なので、

ふつうの power counting で紫外発散があるような diagram は $k \sim 0$ に singularity をもつ。

紫外発散がなければ、素朴に可換空間上の場と同じといってよい。

## ゲージ理論の場合

スカラー場だけの場合 $\hat{p}_\mu$ は人為的に見えるが、ゲージ場も導入すると、 $\hat{p}_\mu$ はゲージ場の一部とみなせる。

この現象は一般に、ゲージ場と adjoint 表現の matter があるときにおきる。例として、U(n)ゲージ場と adjoint fermion からなる系を非可換空間上で考える。

$$S=\frac{1}{(2\pi)^{D/2}\sqrt{\det\theta}}\int d^D x\left(\frac{1}{g^2}tr(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^2-\frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma_\mu[D_\mu,\psi])\right)_*$$

これに対応する行列模型は、

$$S=\frac{1}{g^2}Tr(-\frac{1}{4}[\hat{p}_\mu+\hat{a}_\mu,\hat{p}_\nu+\hat{a}_\nu]^2-\frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma_\mu[\hat{p}_\mu+\hat{a}_\mu,\psi]).$$

ここで、 $p_\mu=p_\mu^{(0)}\otimes 1_n$.

$A_\mu=\hat{p}_\mu+\hat{a}_\mu$ とおくと、

$$S=\frac{1}{g^2}Tr(-\frac{1}{4}[\hat{A}_\mu,\hat{A}_\nu]^2-\frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma_\mu[\hat{A}_\mu,\psi])$$

となり、 $\hat{p}_\mu$ が $\hat{A}_\mu$ に吸収される。

これは U(∞) ゲージ場と adjoint matter の系を形式的に 0 次元に dimensional reduction したものに他ならない。

large-N reduction の基本形。

## ４． SUSY のある場合の twisted reduced model

large-N reduction を SUSY がある場合に適用すると、
DV reduction との関係が見られる。

step1　super field を使って large-N reduction をあらわす。
この段階では、bosonic な座標 $x^\mu$ は非可換化するが、fermionic な座標 $\theta^\alpha$ はそのまま。supermultiplet の各成分ごとに対応する行列がある。

step2　fermionic な座標 $\theta^\alpha$ も非可換化して、supermultiplet を一つの supermatrix であらわす。

# step1　super field を使った large-N reduction

## 考える理論

U(n) をゲージ群としてもつ

$\mathcal{N}=1$ super Yang-Mills + adjoint matter $\phi$ ：

$$S=\int d^4x d^4\theta\, Tr(\bar{\phi}e^{v}\phi e^{-v})$$
$$+\int d^4x d^2\theta \frac{1}{4g^2} Tr(W_\alpha W^\alpha)+\int d^4x d^2\theta Tr(W(\phi))+c.c\ .$$

n は有限でよい。ここでは、$\phi$ と $\bar{\phi}$ は独立な量とみなす。

## 非可換化

Lagrangian 密度に現れる積を＊積に置き換える。

$$S_{NC}=\int d^4x d^4\theta \left(Tr(\bar{\phi}e^{v}\phi e^{-v})\right)_*$$
$$+\int d^4x d^2\theta \frac{1}{4g^2}\left(Tr(W_\alpha W^\alpha)\right)_*+\int d^4x d^2\theta \left(Tr(W(\phi))\right)_*+c.c\ .$$

## 行列模型にマップ

通常の手続きにしたがって、

交換関係 $[\hat{x}^\mu,\hat{x}^\nu]=-iC^{\mu\nu}$ を満たす $\hat{x}^\mu$ $(\mu=1\ldots4)$ を導入。

$C^{\mu\nu}$ の逆行列を $B_{\mu\nu}$ とし、$\hat{p}_\mu=-B_{\mu\nu}\hat{x}^\nu$ で $\hat{p}_\mu$ を定義。

そうすると、交換関係 $[\hat{p}_\mu,\hat{x}^\nu]=i\delta_\mu^\nu$, $[\hat{p}_\mu,\hat{p}_\nu]=iB_{\mu\nu}$をみたす。

# chiral superfield $\phi$ の行列表示

chiral 条件

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\phi = \left(-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right)\phi = 0$$

の解は、よく知られているように、

$$\phi(x,\theta,\overline{\theta}) = \phi_y(x + i\theta\sigma\overline{\theta},\theta)$$
$$= \exp(i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\,\partial_{\mu})\phi_y(x,\theta)\exp(-i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\,\partial_{\mu})$$

であたえられる。独立な自由度は $\phi_y(x,\theta)$.

$\phi_y(x,\theta)$ を行列化したものを $\hat{\phi}_y(\theta)$ とする。

すなわち、おおざっぱには $\hat{\phi}_y(\theta) = \phi_y(\hat{x},\theta)$.

厳密には Weyl ordering で定義。

$$\phi_y(x,\theta) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu x^\mu}\tilde{\phi}_y(k,\theta)$$
$$\hat{\phi}_y(\theta) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}\tilde{\phi}_y(k,\theta)$$

そうすると、$\phi(x,\theta,\overline{\theta})$ を行列化したものは

$$\hat{\phi}(\theta,\overline{\theta}) = \exp(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\,\hat{p}_{\mu})\hat{\phi}_y(\theta)\exp(-\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\,\hat{p}_{\mu})$$

と書ける。

同様に、antichiral superfield $\bar{\phi}(x,\theta,\bar{\theta})$ を行列化したものは

$$\hat{\bar{\phi}}(\theta,\bar{\theta}) = \exp(-\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\ \hat{p}_{\mu})\hat{\bar{\phi}}_{y^+}(\bar{\theta})\exp(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\ \hat{p}_{\mu})$$

と書ける。

## vector superfield $v$ の行列表示

$v(x,\theta,\bar{\theta})$ を行列化したもの、すなわち、$v(\hat{x},\theta,\bar{\theta})$ を Weyl ordering したものを、$\hat{v}(\theta,\bar{\theta})$ とする。そうすると $\phi$ の kinetic term は

$$S_{NC}^{(kin)} = \int d^4x\, d^4\theta \left(Tr\,(\bar{\phi} e^{v} \phi\, e^{-v})\right)_{*}$$

$$= (2\pi)^2\sqrt{\det C}\int d^4\theta\ Tr\,(\hat{\bar{\phi}}(\theta,\bar{\theta})e^{\hat{v}(\theta,\bar{\theta})}\hat{\phi}(\theta,\bar{\theta})\, e^{-\hat{v}(\theta,\bar{\theta})})$$

と書ける。ここで、

$$e^{\hat{V}(\theta,\bar{\theta})} = \exp(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\ \hat{p}_{\mu})\, e^{\hat{v}(\theta,\bar{\theta})}\exp(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\ \hat{p}_{\mu})$$

とすると、

$$S_{NC}^{(kin)}$$

$$= (2\pi)^2\sqrt{\det C}\int d^4\theta\ Tr\,(\hat{\bar{\phi}}_{y^+}(\bar{\theta})e^{\hat{V}(\theta,\bar{\theta})}\hat{\phi}_{y}(\theta)\, e^{-\hat{V}(\theta,\bar{\theta})})$$

となる。

注意　$A_{\mu} = \hat{p}_{\mu} + \hat{a}_{\mu}$ に相当している。

## field strength の定義と行列表示

非可換な場合、定義に不定性があるので考察が必要。

field strength は非可換化する前は、

$$W_\alpha(x,\theta,\bar{\theta}) = -\frac{1}{8}\bar{D}\bar{D}e^{-v(x,\theta,\bar{\theta})}D_\alpha e^{v(x,\theta,\bar{\theta})}$$

で定義される。

注意 これは chiral superfield の空間に作用する微分演算子の等式とみなしてもよい。

( $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$ と同様の意味。)

微分演算子 $\bar{D}\bar{D}e^{-v}D_\alpha e^v$ を chiral superfield $\phi$ に作用させると、

$$\begin{aligned}
&\bar{D}\bar{D}e^{-v}D_\alpha e^v\phi = \bar{D}\bar{D}e^{-v}(D_\alpha e^v)\phi + \bar{D}\bar{D}e^{-v}e^v D_\alpha\phi \\
&= \bar{D}\bar{D}e^{-v}(D_\alpha e^v)\phi + \bar{D}\bar{D}D_\alpha\phi \\
&= \bar{D}\bar{D}e^{-v}(D_\alpha e^v)\phi = \bar{D}(\bar{D}(e^{-v}(D_\alpha e^v)))\phi + \bar{D}e^{-v}(D_\alpha e^v)\bar{D}\phi \\
&= \bar{D}(\bar{D}(e^{-v}(D_\alpha e^v)))\phi = (\bar{D}(\bar{D}(e^{-v}(D_\alpha e^v))))\phi + (\bar{D}(e^{-v}(D_\alpha e^v)))\bar{D}\phi \\
&= (\bar{D}(\bar{D}(e^{-v}(D_\alpha e^v))))\phi
\end{aligned}$$

だから、微分演算子 $\bar{D}\bar{D}e^{-v}D_\alpha e^v$ は

関数 $(\bar{D}(\bar{D}(e^{-v}(D_\alpha e^v))))$ をかける作用に他ならない。

$W_\alpha(x,\theta,\bar{\theta})$ は chiral だから、

$$\begin{aligned}
W_\alpha(x,\theta,\bar{\theta}) &= W^{(y)}{}_\alpha(x + i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta) \\
&= \exp(i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\,\partial_\mu)W^{(y)}{}_\alpha(x,\theta)\exp(-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\,\partial_\mu)
\end{aligned}$$

と書けるが、これも微分演算子の等式とみなせる。

よって、

$$W^{(y)}{}_{\alpha}(x,\theta) = -\frac{1}{8}\exp(-i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,\partial_{\mu})\bar{D}\bar{D}e^{-v(x,\theta,\bar{\theta})}D_{\alpha}e^{v(x,\theta,\bar{\theta})}\exp(i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,\partial_{\mu})$$

となる。

さらに、行列化したとき $e^{\hat{V}(\theta,\bar{\theta})}$ になる微分演算子 $e^{V}$

$$e^{V} = \exp(i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,\partial_{\mu})\,e^{v(x,\theta,\bar{\theta})}\exp(i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,\partial_{\mu})$$

を使うと、

$$W^{(y)}{}_{\alpha}(x,\theta) = -\frac{1}{8}\bar{D}'\bar{D}'e^{-V}D'_{\alpha}e^{V}$$

と書ける。ここで、

$$D'_{\alpha} = \exp(i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,\partial_{\mu})D_{\alpha}\exp(-i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,\partial_{\mu}) = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}$$

$$\bar{D}'_{\dot{\alpha}} = \exp(-i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,\partial_{\mu})\bar{D}_{\dot{\alpha}}\exp(i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,\partial_{\mu}) = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}.$$

よって、非可換化された $W^{(y)}{}_{\alpha}(x,\theta)$ を

$$\hat{W}^{(y)}{}_{\alpha} = -\frac{1}{8}\bar{D}'\bar{D}'e^{-\hat{V}}D'_{\alpha}e^{\hat{V}}$$

とするのが一つの自然な定義。

<u>注意</u>　$\hat{F}_{\mu\nu} = [\hat{A}_{\mu}, \hat{A}_{\nu}]$ に対応。

# 結局

$\mathcal{N}=1$ U(n) super Yang-Mills + adjoint matter $\phi$ :

$$S=\int d^4x d^4\theta\, Tr(\bar{\phi}e^{v}\phi e^{-v})$$
$$+\int d^4x d^2\theta \frac{1}{4g^2} Tr(W_\alpha W^\alpha)+\int d^4x d^2\theta\, Tr(W(\phi))+c.c$$

の非可換化の行列表示、すなわち twisted reduced model は

$$S_{reduced}/(2\pi)^2\sqrt{\det C}$$
$$=\int d^4\theta\, Tr(\hat{\bar{\phi}}e^{\hat{V}}\hat{\phi}e^{-\hat{V}})+\int d^2\theta \frac{1}{4g^2} Tr(\hat{W}_\alpha \hat{W}^\alpha)+\int d^2\theta\, Tr(W(\hat{\phi}))+c.c$$

であたえられる。ここで、

$$\hat{W}_\alpha=-\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}e^{-\hat{V}}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}e^{\hat{V}}.$$

これは、back ground をふくまない。

$e^{\hat{V}}$ をback ground $e^{\hat{V}_0}=e^{2\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\,\hat{p}_\mu}$ の周りで展開すると、非可換空間上の場の理論になる。

## step2　fermionic な座標 $\theta^\alpha$ も非可換化

$\theta^\alpha$ を非可換化する。

$$\{\hat{\theta}^\alpha, \hat{\theta}^\beta\} = \gamma^{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

$SL(2,C)$ を使って標準形

$$(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in C$$

にできる。すなわち、Pauli 行列を使って

$$\hat{\theta}^1 = \sqrt{\gamma}\sigma^1,\ \hat{\theta}^2 = \sqrt{\gamma}\sigma^2$$

と書ける。

$\gamma$ の逆行列を $\beta$ とし、$\hat{\pi}_\alpha$ を下式で定義。

$$\hat{\pi}_\alpha = \beta_{\alpha\beta}\hat{\theta}^\beta$$

$\hat{\theta}^\alpha$ , $\hat{\pi}_\beta$ は次の交換関係を満たす。

$$\{\hat{\pi}_\alpha, \hat{\theta}^\beta\} = \delta^\beta_\alpha \quad \{\hat{\theta}^\alpha, \hat{\theta}^\beta\} = \gamma^{\alpha\beta} \quad \{\hat{\pi}_\alpha, \hat{\pi}_\beta\} = \beta_{\alpha\beta}$$

演算子と関数を $x^\mu$ のときと同様に Weyl ordering で対応させる。

## Weyl ordering

演算子$\hat{O}$ ⇔ $\theta^\alpha$ の関数$O(\theta)$

$$O(\theta) = \int d^2\kappa \; e^{i\kappa_\alpha \theta^\alpha} \tilde{O}(\kappa)$$

$$\hat{O} = \int d^2\kappa \; e^{i\kappa_\alpha \hat{\theta}^\alpha} \tilde{O}(\kappa)$$

$x^\mu$ のときと同様に、次の mapping rule が成り立つ。

## mapping rule

### （1）積と＊積

$$\begin{matrix} \hat{O}_1 \leftrightarrow O_1(\theta) \\ \hat{O}_2 \leftrightarrow O_2(\theta) \end{matrix} \quad \text{ならば} \quad \hat{O}_1\hat{O}_2 \leftrightarrow O_1 * O_2(\theta).$$

ここで、

$$O_1 * O_2(\theta) = e^{\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial}{\partial\eta^\beta}} O(\xi)O(\eta)\Big|_{\xi=\theta,\,\eta=\theta}.$$

### （2）trace と空間積分

$\hat{O} \leftrightarrow O(\theta)$ ならば

$$Str(\hat{O}) = i\sqrt{\det\gamma}\int d^2\theta \; O(\theta).$$

### （3）$\hat{\pi}_\alpha$ との交換子と空間微分

$\hat{O} \leftrightarrow O(\theta)$ ならば $\quad [\hat{\pi}_\alpha, \hat{O}\} \leftrightarrow i\dfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha}O(\theta).$

## Str の意味

Weyl ordering は、

$$\phi = A + \psi_\alpha \theta^\alpha + F\theta^1\theta^2 \leftrightarrow \hat{\phi} = A + \psi_\alpha \hat{\theta}^\alpha + F\frac{1}{2}(\hat{\theta}^1\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}^2\hat{\theta}^1).$$

$\hat{\theta}^\alpha$ を標準形 $\hat{\theta}^1 = \sqrt{\gamma}\sigma^1,\ \hat{\theta}^2 = \sqrt{\gamma}\sigma^2$ とすると、

$\frac{1}{2}(\hat{\theta}^1\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}^2\hat{\theta}^1) = i\gamma\sigma_3$ だから、

$$\int d^2\theta\, \phi = F = i\gamma\, tr(\sigma_3 \hat{\phi}) = i\gamma\, Str\hat{\phi}.$$

つまり、$\hat{\theta}^\alpha$ で grading して supertrace をとる。

結局、$x^\mu$ と $\theta^\alpha$ 両方を非可換化すると、

$$\frac{i\sqrt{\det\gamma}}{(2\pi)^2\sqrt{\det C}} S_{reduced}$$

$$= Str_{\theta\otimes\bar{\theta}\otimes x}(\hat{\bar{\phi}} e^{\hat{V}} \hat{\phi} e^{-\hat{V}}) + \frac{1}{4g^2} Str_{\theta\otimes x}(\hat{W}_\alpha \hat{W}^\alpha) + Str_{\theta\otimes x}(W(\hat{\phi}))$$

$$+ \frac{1}{4g^2} Str_{\bar{\theta}\otimes x}(\hat{\bar{W}}_\alpha \hat{\bar{W}}^\alpha) + Str_{\bar{\theta}\otimes x}(W(\hat{\bar{\phi}}))$$

が得られる。ここで、

$$\hat{W}_\alpha = -\frac{1}{4}[\hat{\bar{\pi}}_1, \{\hat{\bar{\pi}}_2, e^{-\hat{V}}[\hat{\pi}_\alpha, e^{\hat{V}}]\}],$$

$$\hat{\bar{W}}_\alpha = -\frac{1}{4}[\hat{\pi}_1, \{\hat{\pi}_2, e^{\hat{V}}[\hat{\bar{\pi}}_\alpha, e^{-\hat{V}}]\}].$$

## DV reduction v.s. large-N reduction

元の理論

$\mathcal{N}=1$ U(n) super Yang-Mills + adjoint matter $\phi$ :

$$S=\int d^4x\, d^4\theta\, Tr(\bar{\phi}e^{v}\phi e^{-v})$$
$$+\int d^4x\, d^2\theta \frac{1}{4g^2} Tr(W_\alpha W^\alpha)+\int d^4x\, d^2\theta\, Tr(W(\phi))+c.c$$

$\Downarrow$ 非可換化して行列表示

large-N twisted reduced model

$$\frac{\sqrt{\det\gamma}}{(2\pi)^2\sqrt{\det C}} S_{reduced}$$
$$=Str_{\theta\otimes\bar{\theta}\otimes x}(\hat{\bar{\phi}}e^{\hat{V}}\hat{\phi}e^{-\hat{V}})$$
$$+\frac{1}{4g^2}Str_{\theta\otimes x}(\hat{W}_\alpha\hat{W}^\alpha)+Str_{\theta\otimes x}(W(\hat{\phi}))+c.c.$$

紫外発散がない量は、非可換化しても低エネルギーの振る舞いは変わらない。実際、DV 理論で考えているような量は紫外発散がない。

また、$\left\langle Str\left(\hat{\phi}^k\right)\right\rangle$ のような holomorphic な量の期待値は作用の holomorphic 部分 $\frac{i\sqrt{\det\gamma}}{(2\pi)^2\sqrt{\det C}} S_{reduced}{}^{(hol)}=Str_{\theta\otimes x}(W(\hat{\phi}))$ だけで決まる。

よって、

$$-\frac{1}{32\pi^2}\left\langle Tr\left(\frac{W^{(y)}{}_{\alpha}(x,\theta)W^{(y)\alpha}(x,\theta)}{z-\phi_y(x,\theta)}\right)_*\right\rangle_{NC}=\frac{i\sqrt{\det\gamma}}{(2\pi)^2\sqrt{\det C}}\left\langle Str\left(\frac{1}{z-\hat{\phi}}\right)\right\rangle$$

が言えれば、**DV reduction** が **large-N reduction** から導けたことになる。

これは次のようにして示せる。

（1）行列模型から局所演算子の期待値をひきだす。

$$\hat{O}\leftrightarrow O(x,\theta)$$ ならば

$$\frac{(2\pi)^2\sqrt{\det C}}{i\sqrt{\det\gamma}}Str(\hat{O}\delta^{(4)}(\hat{x}-x)\delta^{(2)}(\hat{\theta}-\theta))=tr\,O(x,\theta).$$

（2）恒等式 $$\left(\frac{(2\pi)^2\sqrt{\det C}}{i\sqrt{\det\gamma}}\delta^{(4)}(\hat{x}-x)\delta^{(2)}(\hat{\theta}-\theta)\right)^2=1$$ より、

$$\begin{aligned}
&\frac{i\sqrt{\det\ \gamma}}{(2\pi)^2\sqrt{\det\ C}}Str\left(\frac{1}{z-\hat{\phi}}\right)\\
&=\frac{(2\pi)^2\sqrt{\det\ C}}{i\sqrt{\det\ \gamma}}Str\left(\frac{1}{z-\hat{\phi}}(\delta^{(4)}(\hat{x}-x)\delta^{(2)}(\hat{\theta}-\theta))^2\right)\\
&=\frac{(2\pi)^2\sqrt{\det\ C}}{i\sqrt{\det\ \gamma}}Str\left(\frac{1}{z-\hat{\phi}}\delta^{(4)}(\hat{x}-x)\delta^{(2)}(\hat{\theta}-\theta)\ \delta^{(4)}(0)\delta^{(2)}(0)\right)\\
&=\frac{(2\pi)^2\sqrt{\det\ C}}{i\sqrt{\det\ \gamma}}Str\left(\frac{1}{z-\hat{\phi}}\delta^{(4)}(\hat{x}-x)\delta^{(2)}(\hat{\theta}-\theta)\ \frac{-1}{32\pi^2}\hat{W}^{(y)}{}_{\alpha}\hat{W}^{(y)\alpha}\right)\\
&=-\frac{1}{32\pi^2}tr\left(\frac{W^{(y)}{}_{\alpha}(x,\theta)W^{(y)\alpha}(x,\theta)}{z-\phi_y(x,\theta)}\right)_*
\end{aligned}$$

ここで、最後から 2 番目の変形には非可換の Konishi anomaly を仮定した。

結局 DV reduction は large-N reduction から導けることがわかった。

## supermatrix vs. bosonic matrix

$$S = str(V(M))$$

ここで、$M$ は supermatrix.

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{B'B'B'}}^{m} & \overbrace{\hphantom{B'B'B'}}^{n} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} B & F \\ \hline F' & B' \end{array}\right) & \begin{array}{l} \left.\vphantom{B}\right\} m \\ \left.\vphantom{B}\right\} n \end{array} \end{array}$$

対角化

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \mu_2 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

van der Mont determinant

$$\Delta = \frac{\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{i<j}(\mu_i - \mu_j)^2}{\prod_{i,j}(\lambda_i - \mu_j)^2}$$

より、

$$\int dM \ e^{-S} = \int \prod_i d\lambda_i \prod_j d\mu_j \ e^{-S_{eff}} ,$$

ここで、

$$S_{eff} = \sum_i V(\lambda_i) - \sum_j V(\mu_j) - \sum_{i<j} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2 - \sum_{i<j} \log(\mu_i - \mu_j)^2 + \sum_{i,j} \log(\lambda_i - \mu_j)^2 .$$

固有値密度を

$$\rho(x) = \sum_i \delta(x - \lambda_i) - \sum_j \delta(x - \mu_j)$$

で定義すると、

$$S_{eff} = \int dxe^{-\int dxV(x)\rho(x) - \frac{1}{2}\iint dxdy\rho(x)\rho(y)\log(x-y)^2}$$

となり、bosonic matrix model

$$S = tr(V(M))$$

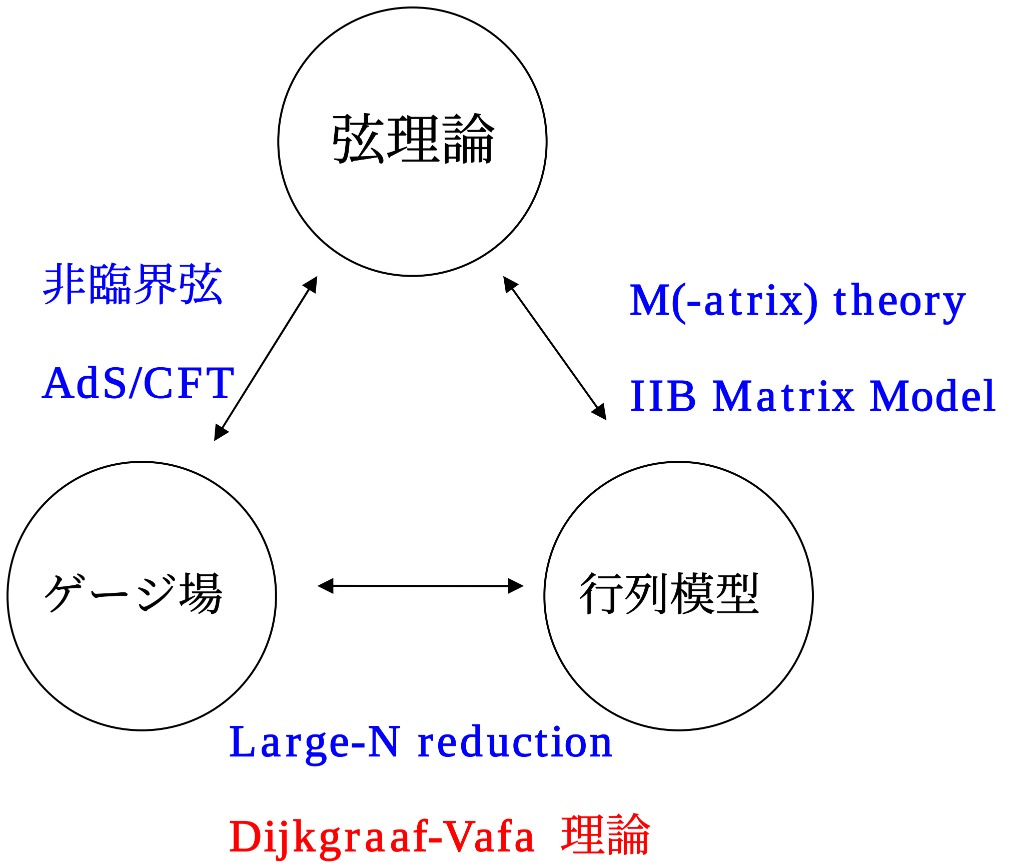
と等価。ただし、

$$n_{bosonic} = m - n .$$

負の固有値分布も許す。　$m - n \neq 0$ ？

## 5．おわりに

弦理論 - ゲージ理論 - 行列模型　の関係




DV 理論はゲージ理論を１つの supermatrix へマップしたものと解釈できる。

IIB Matrix model などは 10＋16 個の行列を力学変数としてもつ。⇒ back ground dependent?

一つの supermatrix に統一できるか？