

電気電子工学専攻 TAT 東京農工大学
 バイオメディカルエレクトロニクス特論I
幾何形状処理の基礎
 ~Laplace-Beltrami 作用素~

第12回講義
 水曜日4限
 教室L0014

吉澤 信
 shin@riken.jp, 客員准教授
 東京農工大学 大学院工学府

独立行政法人
 理化学研究所

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp
幾何形状処理とは？

✓ 幾何学全般を基にコンピュータで形状を処理・解析する技術・方法・アルゴリズム。

微分方程式 線形代数
 位相幾何学 計算幾何学 グラフ理論
 微分幾何学 曲線と曲面の古典幾何学
 代数幾何学 関数解析 図学

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp
関連学問分野 in Computer Science

1次元: 信号・音声処理 数値解析
 コンピュータ・ビジョン(CV) コンピュータ・グラフィクス(CG)
 3次元再構成 オブジェクト表現
 パターン認識 形状識別・認知・分類 CAD/CAGD 画像処理
 フィルタ・領域合成

幾何形状処理 → 様々な応用: 情報学・工学・自然科学

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp
幾何形状処理の応用先

✓ 多様→特に計算工学等の「ものづくり」とゲーム・映画等の「デジタル・エンターテインメント」での応用。

設計: CAD
 製造: CAM
 計測: CAT
 シミュレーション: CAE

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp
形状 = 補間・補外結果 = 解多様体

✓ なぜCS以外でも幅広い応用があるのか？
 - データ点の補間・補外や物理・工学方程式の解曲線・解曲面(熱拡散方程式、波動方程式やナビエ-ストークス方程式の等温度線や等速度面等)。

補間 補外

y y_1 y_2 y_3
 x x_1 x_2 x_3
 $f(x_k)$ $y = f(x)$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp
現実世界の形状データ

✓ なぜCS以外でも幅広い応用があるのか？
 - データ取得技術(Kinect, PS Move, 共焦点レーザー顕微鏡, VIVID, 4D CT等)の発展により現実世界のデータに基づく解析。

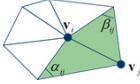

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Today's Talk ?

✓ 幾何形状処理の幅広い技術が微分幾何学に基づく事を紹介. 特に Cotan公式を用いたフレームワークでの多彩な応用事例の解説.

形状モデリングの応用問題 → 曲面上的Laplacian、Laplace/Poisson/Diffusion方程式等 → 応用結果

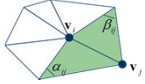
Cotan公式:

$$\Delta_S(\mathbf{v}_i) = \frac{1}{A_i} \sum_j (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)$$



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Contents

1. 形状表現の基礎
2. 微分幾何学の基礎
3. Laplace-Beltrami作用素
4. 応用:
 - ✓ 媒介変数化
 - ✓ 平滑化・意匠形状生成
 - ✓ 形状変形・合成

$$\Delta_S(\mathbf{v}_i) = \frac{1}{A_i} \sum_j (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)$$


Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

形状の表現方法

✓ 連続で滑らかな形状は微分可能な多様体(Manifold): ある一点の近傍がopen unit ball(曲面の場合はdick)と同相.


	陽関数 (Explicit)	陰関数 (Implicit)	媒介変数 (Parametric)
2D曲線 (1D多様体)	$y = f(x)$	$f(x, y) = 0$	$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$
3D曲面 (2D多様体)	$z = f(x, y)$	$f(x, y, z) = 0$	$\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
(d+1)超曲面 (dD多様体)	$x_{d+1} = f(\mathbf{x})$	$f(\mathbf{x}, x_{d+1}) = 0$	$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{d+1}(t))$
例: 円	$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$	$x^2 + y^2 - r^2 = 0$	$\mathbf{r}(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$
	$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$		$\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_d\}$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

位相(Topology)

✓ 同位相: 連続変形で変換可能である事:

- 球、平面、トーラス等はそれぞれ異なる位相.
- 穴(境界)の数、ハンドル(トーラス)の数等で分類.



異なる位相

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

媒介変数表示の代表的な例

✓ スプライン: ベジエパッチ、B-Spline、NURBS、エルミート、グレゴリーパッチ、Coonsパッチ、T-Spline...数多く!


一から形状を作っていくには良いが与えられた任意形状(現実世界のデータ)をSplineに変換するのは難しい.



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

陰関数モデリングが適している応用

✓ 表面再構成、モーフィング、Constructive Solid Geometry等.



Moving-LS, RBF, Convolution Surfaces, MPU, SLIM,...

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

点群曲面表現

✓ 曲面の近似としてのPoint-Set Surfaces:

CM. Alexa et al., IEEE Vis'01.
CM. Pauly et al., ACM TOG 2006.
CM. Botsch et al., SPIG'04.

✓ 点群による形状モデリングースイスETHのグループ:
http://www.agg.ethz.ch/publications/journal_and_conference

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

拡張・離散表現

✓ 多様体の近似:
- メッシュ(三角、四角): 一次近似.

✓ 多様体の拡張(非多様体):
- Simplicial Complex(単体的複体).
- CW-Complex: Medial Axis等.

Simplicial Complex CW-Complex Medial Axis

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Surface Mesh

Manifold Vertex Boundary Vertex Non-Manifold Vertices

✓ k-link: 頂点のk番目の近傍.
✓ Manifold Mesh: 1-linkがdisk(ball)と同相(境界:half-disk).
✓ 3-Connected: 任意の2頂点を取っても連結.
✓ Valence: 頂点の辺数.
✓ Degree: 面の頂点数.
✓ Connectivity: 辺の繋がり情報.
✓ Regular Mesh:
✓ 三角形: valence=6.
✓ 四角形: valence=4.

CP. Alliez and C. Gotman, 2004.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

三角形メッシュが主流

✓ なぜ三角形メッシュか?
- 平面(法線ベクトル)が一意に決まる.
- 微分可能な多様体は三角形分割可能→どのような曲面も位相によらず表現→現実世界の形状データと一からモデリングで作った形状データを統一的に扱える.
- 計算コストが低い.

局所的位相操作

Edge Collapse Half-edge Collapse
Vertex Split Vertex Insertion 1 to 4 Face Split

Property Oriented Mesh

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

三角形メッシュのデータ構造

頂点クラス: 辺、面へのポインター
辺クラス: 頂点、面へのポインター
面クラス: 頂点、辺へのポインター

最も簡単な構造.

頂点列:
X Y Z
X Y Z
...座標
X Y Z

面列:
V_i V_j V_k
V_a V_b V_w
...頂点ID
V₁ V_n V_m

頂点、辺、面の近傍を効率的に探索可能. Half-edge data structure

Progressive Mesh: 階層構造も保存.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Contents

- 形状表現の基礎
- 微分幾何学の基礎
- Laplace-Beltrami作用素
- 応用:
✓ 媒介変数化
✓ 平滑化・意匠形状生成
✓ 形状変形・合成

$$\Delta_s(v_i) = \frac{1}{A_i} \sum_j (\cot \alpha_j + \cot \beta_j)(v_j - v_i)$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

曲線の曲率

✓ 曲率(Curvature):

$$k(t) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

弧長 $s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

接触円 $k = \frac{1}{R}$

曲線の曲率の定義

$$\frac{dr(s)}{ds} = \mathbf{t}(s), \quad \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s)$$

法線 $\mathbf{n}(t)$ 接線 $\mathbf{t}(t)$ 曲率法線 $k(t)\mathbf{n}(t)$

©S. Yoshizawa and A. Belyaev, MMM'00

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

曲線曲率の応用先

Mechanical Engineering: Ball-end Milling Machine Manufacturing

Image Processing: Object Detection

Geology: Road Design, Map etc. Visualization: Coffee Cup Caustics

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

曲面の曲率: 主曲率と主方向

Principal Curvatures: k_{\max}, k_{\min} Principal Directions: $\mathbf{t}_{\max}, \mathbf{t}_{\min}$

法線と任意の接線から決まる平面と曲面の交線の曲率は法断面曲率と呼ばれ(接平面上で接線は無限に選べるので無限にある)最大最小を主曲率、対応する接線を主方向と呼ぶ。

曲面 S 最大主曲率 k_{\max} 最大主方向 \mathbf{t}_{\max}

法線 \mathbf{n} 最小主曲率 k_{\min} 最小主方向 \mathbf{t}_{\min}

©S. Yoshizawa et al., ACM SPM 05

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

曲率テンソル

✓ 曲面の主曲率は二階までの偏微分で決まる:

$$S = S(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

第一次・二次規格量(First and Second Fundamental Forms):

$$\mathbf{I}(du, dv) = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad \mathbf{II}(du, dv) = (du, dv) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$E = S_u \cdot S_u, F = S_u \cdot S_v, G = S_v \cdot S_v, \quad L = S_{uu} \cdot \mathbf{n}, M = S_{uv} \cdot \mathbf{n}, N = S_{vv} \cdot \mathbf{n}$$

✓ Weingarten Map. $k_{\text{directional}}(du, dv) = \frac{\mathbf{II}(du, dv)}{\mathbf{I}(du, dv)}$

-Wの固有値と対応する固有ベクトルが 主曲率と主方向になる:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} GL - FM & EM - FL \\ EG - F^2 & EG - F^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

平均曲率とガウス曲率

✓ 主曲率の平均を平均曲率(Mean Curvature)、積をガウス曲率(Gaussian Curvature)と呼び、第一次・二次規格量の係数からも計算できる。

平均曲率: $H = \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{W}) = \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2}$

ガウス曲率: $K = \det(\mathbf{W}) = k_{\max} \cdot k_{\min}$

$$H = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

ガウス曲率が正・零・負でその形状の近傍が、それぞれ球・シリンダー・双曲面で近似出来る事が知られている。

曲面の曲率は曲がった計量でのLaplace作用素(Laplace-Beltrami作用素)と密接な関係がある。

©Wikipedia

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

山尾根線

✓ 曲面上の特徴線: 曲率線に沿った主曲率の極値集合。

✓ First considered by A. Gullstrand in connection with applications in physiological optics (Nobel Prize 1911).

✓ Crest Lines/Ridge-Valley Lines:

Convex: $k_{\max} > |k_{\min}|, e_{\max} = \frac{\partial k_{\max}}{\partial t_{\max}} = 0, \frac{\partial e_{\max}}{\partial t_{\max}} < 0$

Concave: $k_{\min} < -|k_{\max}|, e_{\min} = \frac{\partial k_{\min}}{\partial t_{\min}} = 0, \frac{\partial e_{\min}}{\partial t_{\min}} > 0$

Convex ← Change of Orientation → Concave

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

山尾根線(曲率の極値)と幾何特徴

縮閉面:
 $f_{\max} = S + n / k_{\max}$
 $f_{\min} = S + n / k_{\min}$

©S. Yoshizawa et al., CAGD 2008

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

簡略化・領域分割・Meshing

✓ 最適な近似要素の縦横比:
 $\frac{k_{\min}}{k_{\max}} \approx \frac{1}{2}$

©P. Heckbert and M. Garland, JCG, 1999.
 ©D. Cohen-Steiner et al., SIGGRAPH'04.
 ©P. Alliez et al., SIGGRAPH'03.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Contents

1. 形状表現の基礎
2. 微分幾何学の基礎
3. Laplace-Beltrami作用素
4. 応用:
 - ✓ 媒介変数化
 - ✓ 平滑化・意匠形状生成
 - ✓ 形状変形・合成・検索

$$\Delta_S(\mathbf{v}_i) = \frac{1}{A_i} \sum_j (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

復習: 勾配: Gradient

✓ 勾配(Gradient): スカラー場の各点で変化が最大の方向と変化率を大きさに持つベクトル場.

✓ 勾配作用素: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$

✓ 勾配ベクトルの表記:
 $\nabla I = \nabla I(x, y) = \left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y} \right)$
 $= \left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right) = (I_x, I_y)$

✓ エッジの大きさ = 勾配の大きさ:
 $\|\nabla I\| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

復習: Laplace方程式・Poisson方程式

✓ ラプラス作用素(Laplacian): 滑らかさを記述.

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

✓ 発散、湧き出し(Divergence): 注:ベクトルに対する作用素.

$$\text{div} = \nabla \cdot = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\mathbf{v}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$$

✓ Laplace方程式: 自然科学の多くの分野で重要. $\Delta I = 0$

✓ Poisson方程式: Laplace方程式の右辺が関数. $\Delta I = g$

✓ 解くには境界条件(境界での値や微分値)が必要.

✓ GradientのDivergenceはLaplacian:
 $\text{div} \nabla = \Delta \quad \Delta I = \text{div} \nabla I$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

変分法

✓ 変分法(Variational Calculus): 極小、極大を汎関数で停留条件を満たす様に求め、対応する偏微分方程式を導出.

✓ 汎関数(functional): 関数の関数. Euler-Lagrange方程式

例(エッジ強度の積分): $E(I(x, y)) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \|\nabla I\|^2 dx dy$

✓ 停留条件: 第一変分がゼロ(関数での1階微分がゼロ).

$$E(u(x, y)) = \iint_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \Rightarrow \min \Leftarrow \delta E = 0$$

✓ 復習: 極小、極大:
 極大値: $f''(x) < 0$
 極小値: $f''(x) > 0$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

変分法2

RIKEN

$E(u(x, y)) = \iint_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \Rightarrow \min \Leftarrow \delta E = 0$

摂動(微小変化)した比較関数で置き換え、その偏微分をゼロとする:
 $U(x, y, \alpha) = u(x, y) + \alpha \eta(x, y)$
 積分の領域: Ω の境界曲線 $\partial\Omega$ では $\eta(x, y) = 0$ とする.

$E(U(x, y)) = \iint_{\Omega} F(x, y, U, U_x, U_y) dx dy = \iint_{\Omega} F(x, y, u + \alpha \eta, u_x + \alpha \eta_x, u_y + \alpha \eta_y) dx dy$

$\delta E = \frac{\partial}{\partial \alpha} E(u + \alpha \eta) \Big|_{\alpha=0} = \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, y, U, U_x, U_y) dx dy \Big|_{\alpha=0}$

↑第一変分

$= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial U_x} \frac{\partial U_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial U_y} \frac{\partial U_y}{\partial \alpha} \right) dx dy \leftarrow \text{全微分}$

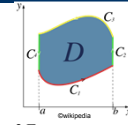
$= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \eta + \frac{\partial F}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \eta_y \right) dx dy$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

変分法3

RIKEN

✓ 準備:

グリーンの定理 → 

$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \eta_y \right) dx dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \eta_y \right) dx dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right) dx dy - \iint_{\Omega} \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) dx dy$

$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial u_x} dy - \eta \frac{\partial F}{\partial u_y} dx \right) = 0$ ←グリーンの定理: 面積分を線積分に変換.

積分の定義域: Ω の境界曲線 $\partial\Omega$ では $\eta(x, y) = 0$ なので.

$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \eta_y \right) dx dy = - \iint_{\Omega} \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) dx dy$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

変分法4

RIKEN

$\delta E = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \eta + \frac{\partial F}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \eta_y \right) dx dy$

$= \iint_{\Omega} \eta \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right) dx dy$

↑がゼロになるためには、下記偏微分方程式を満たす:

✓ 2変数で1階微分の汎関数に対する公式:

$E(u(x, y)) = \iint_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \Rightarrow \min$

Euler-Lagrange 方程式 $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

変分法5

RIKEN

$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0$

エッジ強度の積分エネルギーの場合:

$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \|\nabla I\|^2 dx dy \Rightarrow \min \quad F = \frac{1}{2} \|\nabla I\|^2 = \frac{1}{2} (I_x^2 + I_y^2)$

$\frac{\partial F}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial I_x} = I_x, \quad \frac{\partial F}{\partial I_y} = I_y$

$\frac{\partial F}{\partial I} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial I_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial I_y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} I_x - \frac{\partial}{\partial y} I_y = -\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = -\Delta I$

つまり、Laplace方程式の解がエネルギーを最小化する:

$\Delta I(x, y) = 0$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

変分法6

RIKEN

$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0$

例えば、Poisson方程式は:

$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\|\nabla I\|^2 + 2If(x, y)) dx dy \Rightarrow \min \quad F = \frac{1}{2} (I_x^2 + I_y^2 + 2If)$

$\frac{\partial F}{\partial I} = f, \quad \frac{\partial F}{\partial I_x} = I_x, \quad \frac{\partial F}{\partial I_y} = I_y$

$\frac{\partial F}{\partial I} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial I_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial I_y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} I_x - \frac{\partial}{\partial y} I_y + f = -\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} + f = f - \Delta I$

つまり、Poisson方程式の解がエネルギーを最小化する:

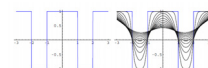
$\Delta I(x, y) = f(x, y)$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

平滑化(Smoothing)とは何か?

RIKEN

✓ 畳み込みと平滑化: Convolution Kernel: g
 $f * g = \int f(t)g(x-t)dt, \quad f, g \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad |x| \rightarrow \infty, f(x), g(x) \rightarrow 0.$



Normalized Convolution: $\int f(t)g(x-t)dt / \int g(x-t)dt.$

✓ 拡散方程式(偏微分方程式)と平滑化: 拡散方程式はフーリエ変換を用いると(ある境界条件の場合に)形式解が導ける!

$\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h = \text{div}(\text{grad}(h(\mathbf{x}, t))), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, h(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}). \quad G_\sigma(b) = e^{-(b/a)^2}.$

拡散方程式のフーリエ解は基本解と初期値の畳み込み:

$h(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int f(\mathbf{y})G_{\sqrt{4t}}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)dy$

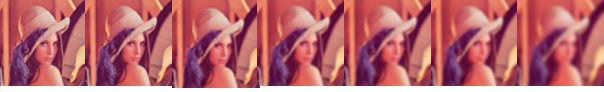
拡散の時間変化 = Gaussianフィルタの標準偏差パラメータ変化

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

標準偏差と時間変化

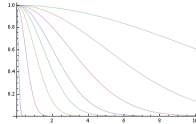

RIVEN

$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Delta I(\mathbf{x}, t), \quad t \rightarrow \infty$ 拡散度合=時間経過=
Gaussianフィルタの標準偏差



$I(\mathbf{x}, \sigma) = \int g_\sigma(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) I(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \sigma \rightarrow \infty$

$g_a(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$


Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

画像処理での平滑化

RIVEN

- Linear Diffusion (Gaussianフィルタ): Gabor 1960.

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Delta I(\mathbf{x}, t),$$

$$I^{new}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g_\sigma(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) I(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

- Anisotropic (Nonlinear) Diffusion: P. Perona and J. Malik, IEEE PAMI, 1990.

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \text{div}(g_\sigma(|\nabla I(\mathbf{x}, t)|^2) \nabla I(\mathbf{x}, t)), \quad g_a(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$$
- Total Variation: L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, Physica D, 1992.

$$\arg \min_{I^{new}} \lambda \int_{\Omega} \phi(|\nabla I^{new}(\mathbf{x})|) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g_\sigma * I^{new}(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

$$\lambda \text{div} \left(\frac{\phi'(|\nabla I^{new}(\mathbf{x})|)}{|\nabla I^{new}(\mathbf{x})|} \nabla I^{new}(\mathbf{x}) \right) = (g_\sigma * I^{new}(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x})) * g_\sigma(-\mathbf{x})$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

非線形拡散フィルタ

RIVEN

$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \text{div}(c(|\nabla I(\mathbf{x}, t)|) \nabla I(\mathbf{x}, t)), \quad t \rightarrow \infty \quad c(x) = \frac{1}{1 + \alpha x^2}$




Alpha=0.1 Alpha=0.005

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Bilateralフィルタ

RIVEN



Gaussian Filter ← Input → **Bilateral Filter**

$Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_\sigma(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$ $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_\sigma(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) g_\sigma(\|I(\mathbf{x}) - I(\mathbf{y})\|)$

$g_a(r) = e^{-\frac{r^2}{a^2}}$ **Intensity (Tonal) Kernel** **Spatial Kernel**

Spatial-Tonal Normalized Convolution:

$$I^{new}(\mathbf{x}) = \int Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I(\mathbf{y}) d\mathbf{y} / \int Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

エッジ特徴を保存する!

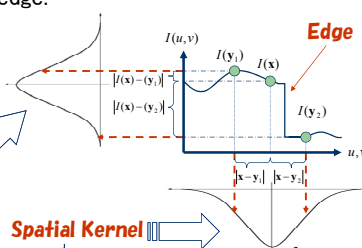
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

何故エッジを保存するのか?

RIVEN

- Intensity Kernel: Suppresses averaging across the edge.

$$I^{new}(\mathbf{x}) = \frac{\int Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{\int Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}}$$
- Spatial Kernel: Localizes the suppression.



Intensity Kernel **Spatial Kernel**

$$Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_a(\|I(\mathbf{x}) - I(\mathbf{y})\|) g_\sigma(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$$

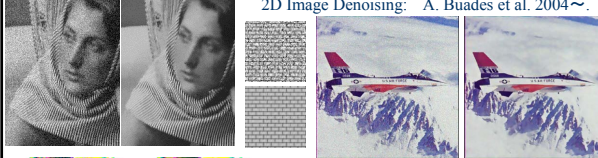
$$g_a(r) = e^{-\frac{r^2}{a^2}}$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp


さらにパターンを保存するNL-Meansフィルタ

RIVEN


2D Image Denoising: A. Buades et al. 2004~



3D Mesh Smoothing: S. Yoshizawa et al. 2006.



Time-Varying Range Images Filter: O. Schall et al. 2006.



Video Enhancement (3D Image): E. Bennett and L. McMillan, 2005.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

何故パターンを保存するのか？

✓ Non-Local (NL-) Means Filter: A. Buades, B. Coll, and J.-M. Morel, 2004~.
 ✓ **Similarity Kernel: Suppresses averaging across the pattern.**

$$I^{non}(x) = \frac{\int Z(x,y)I(y)dy}{\int Z(x,y)dy}, \quad g_\sigma(r) = e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}$$

Similarity Kernel

$$Z(x,y) = g_\sigma(\text{Distance}(X,Y)) = g_\sigma(D(x,y)^2)$$

$$D(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(t) |I(x-t) - I(y-t)|^2 dt$$

Gaussian Cross-Correlation

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

変分法によるエネルギー最小化

✓ Laplace方程式はディリクレ・エネルギーを最小化する事で導かれ、その解は調和写像と呼ばれる。
 ✓ **ディリクレ・エネルギー:** 勾配の大きさを積分→エッジの大きさの和=凹凸具合。

定義域: Ω
 定義域境界: $\partial\Omega$

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \|\nabla I\|^2 dx dy \Rightarrow \min$$

✓ 変分法によりLaplace方程式がディリクレ・エネルギーのEuler-Lagrange方程式として導かれる↓

$$\Delta I(x,y) = 0 \quad (x,y \in \Omega)$$

$$I(x,y) = g(x,y) \quad (x,y \in \partial\Omega)$$

境界条件: $g(x,y)$

凹凸具合が最小化=滑らかな(調和な)解。

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Laplace-Beltrami作用素

✓ 曲面上のLaplacian (曲がった計量を持つ):
 - First Differential Parameter [Beltrami 1859].

$$\Delta_S \phi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} G \phi_u - F \phi_{uv} + \frac{\partial}{\partial v} E \phi_v - F \phi_{vu} \right\}$$

曲面: $S = S(u,v)$
 単位法線ベクトル: \mathbf{n}
 平均曲率: H
 曲面の第一次規格量の係数: E, F, G .

■ **自分自身の曲面を代入すると平均曲率と単位法線ベクトルの積の2倍になる!**

$$\Delta_S S = 2H\mathbf{n} = (k_{\max} + k_{\min})\mathbf{n}$$

$$\Delta_S \mathbf{n} = -(k_{\max}^2 + k_{\min}^2)\mathbf{n} - \nabla_S(k_{\max} + k_{\min})$$

✓ 曲面上の勾配作用素:
 - Second Differential Parameter [Beltrami 1859]: $\nabla(\cdot)$.

$$\nabla_S \phi = \nabla(\phi, S) = \frac{1}{EG-F^2} ((G\phi_u - F\phi_v)S_u + (E\phi_v - F\phi_u)S_v)$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

解釈

凹凸具合が最小化=滑らかな(調和な)解=平均:

$$\left(\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \|\nabla I\|^2 dx dy \Rightarrow \min \right) \equiv \Delta I = 0$$
 曲面: $S = S(u,v)$

✓ 曲面上でも同様に... 平均曲率: H 単位法線ベクトル: \mathbf{n}

$$\left(\frac{1}{2} \int_S \|\nabla_S(S)\|^2 dA = \iint_{\Omega} \sqrt{EG-F^2} dudv \Rightarrow \min \right) \equiv \Delta_S S = 2H\mathbf{n} = 0$$

■ **自分自身の曲面を曲面上の勾配に代入すると1になり! 面積の最小化(極小曲面)になる。**

$H = 0 \Leftrightarrow$ **極小曲面**
= 曲面凹凸の最小化.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Cotan Formula

✓ 三角形メッシュでの近似: **Cotan Formula**: [Winslow 1967, Pinkall & Polthier 1993, Meyer et al. 2003].
 - 収束の証明: Hildebrandt et al. *Geometriae Dedicata* 2007.

$$\Delta_S(\mathbf{v}_i) = \frac{1}{A_i} \sum_j (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)$$

Umbrella Operatorの一種: $U(\mathbf{v}_i) = \frac{1}{W} \sum_j w_{ij}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)$

✓ ディリクレ・エネルギー最小化の線形近似で導出:
 1-linkの面積: A_i (Voronoi面積を使うと高精度)

$$2 \int \|\nabla_T f\|^2 = \cot \theta_3 \|f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_2)\|^2 + \cot \theta_2 \|f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_3)\|^2 + \cot \theta_1 \|f(\mathbf{v}_2) - f(\mathbf{v}_3)\|^2$$

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Laplace-Eigenスペクトラム

✓ Laplacian行列の固有解析(Spherical Harmonicsの一般化):
 入力固有関数展開で表現。

太鼓の形が聞こえるか?

✓ 曲面上ではLaplace-Beltrami作用素を用いて、固有解析が可能→形状検索の特徴量や周波数解析等の応用。

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Contents

1. 形状表現の基礎
2. 微分幾何学の基礎
3. Laplace-Beltrami作用素
4. 応用:
 - ✓ 媒介変数化
 - ✓ 平滑化・意匠形状生成
 - ✓ 形状変形・合成



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

媒介変数化



3D Mesh $\xrightarrow{\text{Mapping / Parameterization}}$ 2D Mesh

- ✓ 3Dメッシュ各頂点に2D座標を(一対一)割り当てる事.
- ✓ カットや領域分割で平面と同相なChartを生成.
- ✓ 多様な応用.



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

写像の歪

$f: (u, v) \in U \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S, \quad dl^2 = Edu^2 + Fduv + Gdv^2, \quad E = S_u^2, F = S_u \cdot S_v, G = S_v^2.$

曲面上の接平面: Unit Circle \rightarrow Ellipse

$J|_{u=(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad J = (S_u, S_v), \text{ Jacobian of } f.$

Γ^2 and γ^2 are eigenvalues of $J^T J = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad J = (S_u, S_v), \text{ Jacobian of } f.$

Isometry: $\Gamma = \gamma = 1.$ Conformality: $\Gamma = \gamma.$ Local Area Distortion: $\Gamma\gamma = \sqrt{\det(J^T J)}.$

Local Stretch: $\sigma = \sqrt{\text{trace}(J^T J)} = \sqrt{(\Gamma - \gamma)^2 + 2\Gamma\gamma} / 2 = \sqrt{(\Gamma^2 + \gamma^2) / 2}.$

Quasi-Conformal Term Area Term

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

等角・等面積・等長写像



Conformal \rightarrow Quasi-Isometry

角度保存 角度と面積の歪最小化

- ✓ 等長写像は等角写像かつ等面積写像: **Isometry = Conformal + Equiareal:**
- Developable surfaces (可展面): ガウス曲率 = ゼロだけが平面への等長写像を持つ.
- Quasi-Isometry (Stretch): 準等長写像は角度と面積の誤差を最小化.
- 等角写像は常に存在する.

✓ C. F. Gauss, *Theorema Egregium* (1828): *Gaussian curvature is intrinsic.*

✓ B. Riemann: *Existence of conformal map* (1851).



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

等角写像と調和写像

- ✓ 等角写像である=コーシー-リーマン方程式を満たす:

$$(u, v) \rightarrow (x, y) \quad \nabla u = R_{90}(\nabla v)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
- ✓ 曲がった空間では...

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{G}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial v}{\partial y}$$
- ✓ 等角写像の近似としての調和写像(準等角写像):

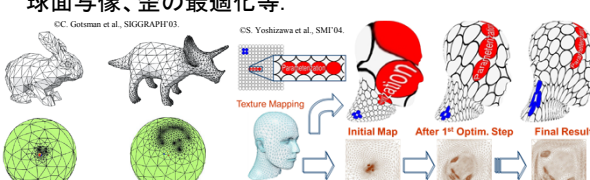
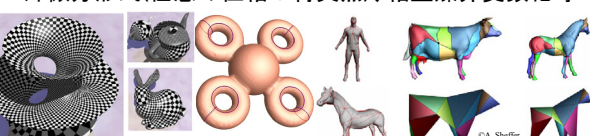
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Rightarrow \Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$
- ✓ 同様に...

$$\Delta_S u = 0, \quad \Delta_S v = 0.$$

注: 調和写像であっても、等角写像とは限らない.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp


Mesh Parameterizations

- ✓ 球面写像、歪の最適化等.
 
- ✓ 外微分形式(任意の位相+特異点)、相互媒介変数化等.
 

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Contents

1. 形状表現の基礎
2. 微分幾何学の基礎
3. Laplace-Beltrami作用素
4. 応用:
 - ✓ 媒介変数化
 - ✓ 平滑化・意匠形状生成
 - ✓ 形状変形・合成



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

曲面上の拡散方程式

✓ 拡散方程式=凹凸具合の最小化課程: 平滑化効果:

$$\left(\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \|\nabla I\|^2 dx dy \Rightarrow \min\right) \equiv \frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I, t \rightarrow \infty.$$

✓ 曲面上でも同様に... 平均曲率流(MCF: Mean Curvature Flow)

$$\left(\frac{1}{2} \int_S \|\nabla_s(S)\|^2 dA \Rightarrow \min\right) \equiv \frac{\partial S}{\partial t} = \Delta_s S = 2H\mathbf{n}, t \rightarrow \infty$$

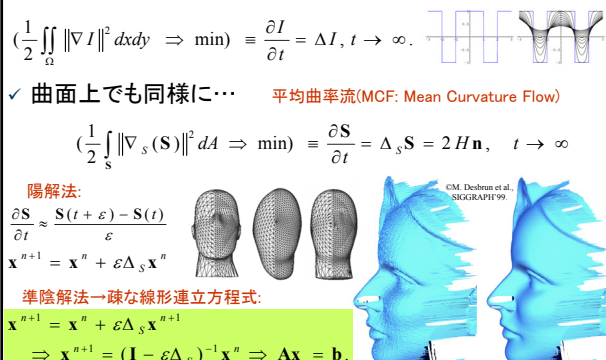
陽解法:

$$\frac{\partial S}{\partial t} \approx \frac{S(t+\varepsilon) - S(t)}{\varepsilon}$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \varepsilon \Delta_s \mathbf{x}^n$$

準陰解法→疎な線形連立方程式:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \varepsilon \Delta_s \mathbf{x}^{n+1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^{n+1} = (\mathbf{I} - \varepsilon \Delta_s)^{-1} \mathbf{x}^n \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$


Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

特徴保存平滑化

✓ エッジ保存: 異方性MCF, Bilateral Mesh Filtering, etc.

– 曲率等の重み付平均によって離散化される非線形偏微分方程式.



✓ パターン保存: Non-Local Means Mesh Filters:


– 局所形状のSimilarityを重みとした平均.



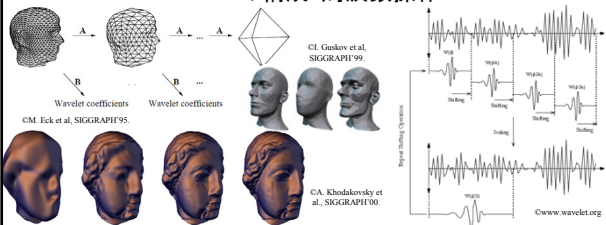
Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

再分割・多重解像度解析

✓ Subdivision=要素分割+平滑化:



✓ Multiresolution Meshの構成・周波数操作:



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

意匠形状設計: 美しい形状とは?

✓ 曲げエネルギー(Bending Energy): $\int k^2 ds$

$\int k^2 ds \rightarrow \min$

EulerのElastica (Mechanical Spline):

$$k_{ss} + \frac{1}{2} k^3 = 0$$

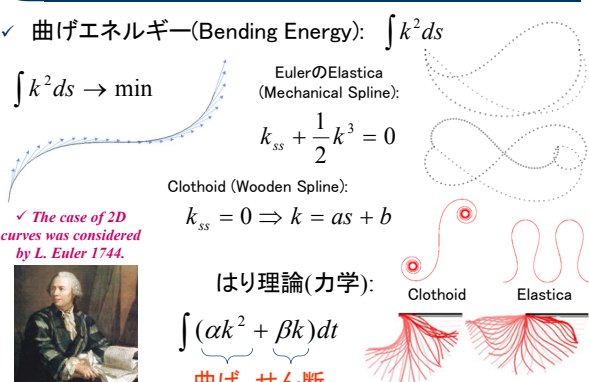
Clothoid (Wooden Spline):

$$k_{ss} = 0 \Rightarrow k = as + b$$


はり理論(力学):

Clothoid Elastica

曲げ せん断



✓ The case of 2D curves was considered by L. Euler 1744.



Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Aesthetic Surfaces

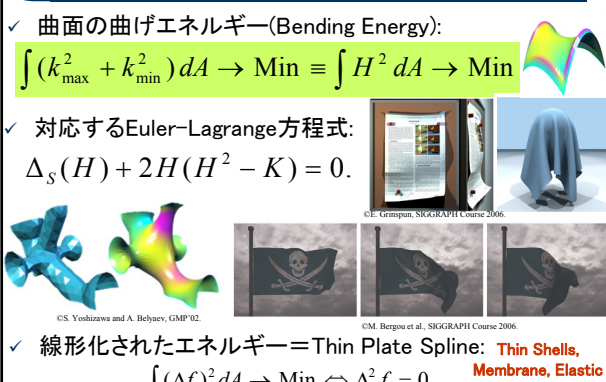
✓ 曲面の曲げエネルギー(Bending Energy):

$$\int (k_{\max}^2 + k_{\min}^2) dA \rightarrow \text{Min} \equiv \int H^2 dA \rightarrow \text{Min}$$

✓ 対応するEuler-Lagrange方程式:

$$\Delta_s(H) + 2H(H^2 - K) = 0.$$

線形化されたエネルギー=Thin Plate Spline: Thin Shells, Membranes, Elastic Shapes...

$$\int (\Delta f)^2 dA \rightarrow \text{Min} \Leftrightarrow \Delta^2 f = 0.$$


Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Snake / Active Contour法

✓ 曲線の曲率と画像のエッジに基づくエネルギー関数を最小化→領域抽出.

$$\sum (\underbrace{\alpha(r_{ss} = kn)^2}_{\text{Bending Energy}} + \underbrace{\beta r_s^2}_{\text{Membrane}} + \underbrace{\gamma E_{\text{image}}}_{\text{Fitting}}) \rightarrow \text{Min}$$

✓ 3次元曲面への拡張:

$$\sum \|\alpha(\Delta_s S \equiv 2Hn) + \beta E_{\text{fit}}\|^2 \rightarrow \text{Min}$$

Bending Energy (Cotan Formula) Fitting

©math.berkeley.edu/~sethian ©A. Sharf et al. EG'06

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

復習: Inpainting & Texture Transfer

✓ 画像から似ている画素・Textureを持つてくる.

- Texture合成: Pixel/Texture Transfer, Image Completion.

類似検索

©I. Deori et al. SIGGRAPH 2003 ©D. Hoiem, Univ. Illinois ©H. Yamauchi et al., CGI 2003

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

復習: Shape Completion

✓ 3D形状でも補間+Transfer.

©V. Kravovoy and A. Sheffer, SIG'05 ©A. Sharf et al. SIGGRAPH 04

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Contents

1. 形状表現の基礎
2. 微分幾何学の基礎
3. Laplace-Beltrami作用素
4. 応用:
 - ✓ 媒介変数化
 - ✓ 平滑化・意匠形状生成
 - ✓ 形状変形・合成

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

復習: Poisson Image Editing

✓ Idea: 良いBlendingはSource画像の勾配(Gradient=エッジ)を可能な限り保持する事が重要.

Source画像のGradient(マスク内)をTargetにコピーしマスク内だけTargetの境界条件で新しい輝度値Iを解く.

$$\Delta I = \text{div } \nabla g$$

Gradients $v = \nabla g$ Mask Target Ω h I

©J. Sun et al. SIGGRAPH 2004

Source画像 Target画像 $h = h(x, y)$ Poisson方程式を解く!

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

復習: Laplacian-Poisson Mesh Editing

✓ 3次元形状・メッシュに拡張されてLaplacian-Poisson Mesh変形・Editingと呼ばれる一大研究分野に発展.

©X. Hung et al. ACM SPM '07 ©S. Yoshizawa et al. EUROGRAPHICS 2007 ©Perce et al. SIGGRAPH 2004

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

Discrete Differential Coordinates

✓ 原理は画像の場合と同じでLaplace-Beltrami作用素を使う

$$\Delta I = \text{div} \nabla g \Rightarrow \Delta_S \mathbf{x}^d = T(\delta) = T(\text{div}_S \nabla_S \mathbf{x})$$

局所変換→Fragmented Mesh 最小化→疎な線形連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

意匠曲面生成と同様に二重調和写像を用いた方法:

$$\int (H^2 \approx \|\Delta_S \mathbf{S}\|^2) dA \rightarrow \text{Min} \approx \Delta_S^2 \mathbf{S} = \mathbf{g}$$

©A. Isichenko et al., SIGGRAPH'11

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

復習: Deformation Transfer

✓ 同じ原理で変形のTransferも可能.

©R. W. Sumner and J. Popovic, SIGGRAPH 2004. ©K. Zhou et al., SIGGRAPH 2005.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

まとめ

✓ 幾何形状処理の幅広い技術が微分幾何学に基づく事を紹介. 特にCotan公式を用いたフレームワークでの多彩な応用事例の解説.

形状モデリングの応用問題 曲面上のLaplacian、Laplace/Poisson/Diffusion方程式等 数値解法による結果

$$\Delta_S \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial G\varphi - F\varphi_x}{\partial u} \sqrt{EG-F^2} + \frac{\partial E\varphi - F\varphi_y}{\partial v} \sqrt{EG-F^2} \right\}$$

$$\Delta_S(\mathbf{v}_i) = \frac{1}{A_i} \sum_j (\cot \alpha_j + \cot \beta_j)(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)$$

Differential Geometry Concepts Adapting Discrete Differential Geometry

Smooth Surfaces Dense Triangle Meshes

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

参考図書1

✓ 解説記事:

- 特集 **デジタル幾何形状処理**
主旨+6記事:金井 崇、大竹 豊、川原田 寛、杉原 厚吉、吉澤 信、高橋 成雄、三谷 純、計算工学、16(2):2518-2545、2011.
- **最新コンピュータグラフィックス -基礎から応用まで-**
金井 崇、高橋 成雄、"1. モデリング", 画像電子学会誌 ビジュアルコンピューティング特集号、33(4):612-619、2004.

✓ 教科書:

- **Lectures on Classical Differential Geometry: 2nd Edition**
D. Struik, Dover Publications, 1988.
- **CAD/CAMにおける曲線曲面のモデリング**
穂坂 衛(著)、東 正毅 (訳)、久志本 琢也 (訳)、斉藤 剛 (訳)、東京電機大学出版局、1996.
- **グラフィックスの数理**
杉原 厚吉、共立出版、1995.
- **Curves and Surfaces for CAGD, Fifth Edition: A Practical Guide**
G. Farin, Morgan Kaufmann, 2001.
- **Polygon Mesh Processing**
M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, and B. Levy, A K Peters/CRC Press, 2011.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

参考図書2

✓ Parameterization:

- M. Floater and K. Hormann, "**Surface Parameterization: a Tutorial and Survey**", Advances in Multiresolution for Geometric Modelling, 157-186, 2005.
- A. Sheffer, E. Praun, and K. Rose, "**Mesh parameterization methods and their applications**", Found. Trends. Comput. Graph. Vis., 2(2):105-171, 2006.
- K. Hormann, B. Levy, and A. Sheffer, "**Mesh parameterization: theory and practice**", ACM SIGGRAPH courses, 2007.

✓ Remeshing & Compression:

- P. Alliez, M. Attene, C. Gotsman, and G. Ucelli, "**Recent Advances in Remeshing of Surfaces**", in Shape Analysis and Structuring, 2007.
- P. Alliez and C. Gotsman, "**Recent Advances in Compression of 3D Meshes**", in Multiresolution for Geometric Modelling, 2004.

✓ Geometric Feature Extraction:

- S. Yoshizawa, A. Belyaev, H. Yokota, and H.-P. Seidel, "**Fast, Robust, and Faithful Methods for Detecting Crest Lines on Meshes**", CAGD, 25(8):545-560, 2008.
- S. Rusinkiewicz, F. Cole, D. DeCarlo, and A. Finkelstein, "**Line Drawings from 3D Models**", SIGGRAPH Asia class, 2008.

✓ Aesthetic Shape Design:

- E. Grinspun, M. Desbrun, K. Polthier, P. Schroder, and A. Stern, "**Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction**", ACM SIGGRAPH courses, 2007.

Shin Yoshizawa: shin@riken.jp

参考図書3

✓ Smoothing/Noise Reduction:

- M. Desbrun, M. Meyer, P. Schroder, and A. Barr, "**Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow**", ACM SIGGRAPH, 317-324, 1999.
- A. Adams, N. Gelfand, J. Dolson, and M. Levoy, "**Gaussian KD-trees for fast high-dimensional filtering**", ACM SIGGRAPH, 21:1-12, 2009.

✓ Multiresolution/Subdivision/Decimation:

- P. Heckbert, J. Rossignac, H. Hoppe, W. Schroeder, M. Soucy, and A. Varshney, "**Multiresolution Surface Modeling**", ACM SIGGRAPH courses, 1997.
- D. Zorin, P. Schroeder, T. DeRose, L. Kobbelt, A. Levin, and W. Sweldens, "**Subdivision for Modeling and Animation**", ACM SIGGRAPH courses, 2000.

✓ Laplacian-Poisson Mesh Processing:

- O. Sorkine, "**Laplacian Mesh Processing**", EUROGRAPHICS STAR, 2005.
- M. Alexa, "**Mesh editing based on discrete Laplace and Poisson models**", ACM SIGGRAPH courses, 2006.
- B. Levy and H. Zhang, "**Spectral mesh processing**", ACM SIGGRAPH courses, 2010.

✓ Shape Retrieval:

- A. Bronstein, M. Bronstein, M. Ovsjanikov, and L. Guibas, "**Shape Google: geometric words and expressions for invariant shape retrieval**", ACM TOG, 30(1):1-20, 2011.
- E. Boyer et al., "**SHREC 2011: robust feature detection and description benchmark**", EG Workshop on 3D Object Retrieval, 71-78, 2011.

関連会議・雑誌



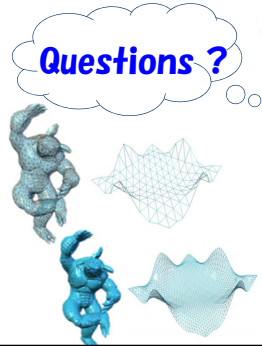
- ✓ SGP: ACM/EG Symp. on Geometry Processing.
- ✓ SPM: ACM Symp. on Solid and Physical Modeling.
- ✓ SMI: IEEE Int. Conf. on Shape Modeling and Applications.
 - SCG: ACM Symp. on Computational Geometry.
 - GMP: Geometric Modeling and Applications.
 - SCA: ACM Symp. on Computer Animation.
 - MMCS: Mathematical Methods for Curves and Surfaces.
 - CAGD: Computer Aided Geometric Design.
 - CAD: Computer Aided Design.
 - EG Workshop on 3D Object Retrieval.
 - Journal of Computational Physics.
 - etc.
- ✓ その他CG/CV/IP全般: SIGGRAPH, EG, PG, GI, IEEE Vis, CGI, CVPR, ICCV, ... ACM TOG, CGF, IEEE TVCG, IJCV, IEEE PAMI, Visual Computer, Graphical Models, ...

The End



理化学研究所

Thank you very much for your attention !



<http://www.riken.jp/briect/Yoshizawa/>

TAT 国立大学法人 東京農工大学
Tokyo University of Agriculture and Technology

Shin Yoshizawa

幾何形状処理の基礎
~Laplace-Beltrami 作用素~